Reine Mathematik

Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen mit halbfiniter Koeffizientenmatrix

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt von der

Philosophischen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Bonn

Von

Bruno Ritzdorff
aus Bonn

Bonn 1938

Referenten:

Professor Dr. Erich Bessel-Hagen

Professor Dr. Hans Beck

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus „Mathematische Zeitschrift", Band 44, Heft 1

Verlag von Julius Springer in Berlin

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 23

Kapitel I.

Verallgemeinerung der Transformation von Lagrange.

A. Unter besonderen Voraussetzungen 27
B. Die vorbereitenden Transformationen 31
C. Der allgemeine Fall 34

Kapitel II. Der Reduktionssatz.

A. Erklärung der Begriffe 36
B. Ein besonders einfacher Fall des Reduktionssatzes 38
C. Beweis des Reduktionssatzes im allgemeinen Fall 39

Kapitel III.

Nachweis eines kanonischen Systems von Normalformen.

A. Hilfssätze für die weitere Reduktion 43
B. Bezeichnungen 44
C. Weitere Reduktion der Normalformen 45
D. Nachweis der Inkongruenz der restlichen Normalformen 49

Einleitung.

In der Hilbertschen Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen und in den neueren Fortsetzungen dieser Theorie, insbesondere durch J. v. Neumann, hat die Spektraltheorie im Vordergrund gestanden, also diejenige Theorie, die als Analogon des Hauptachsentheorems der quadratischen Formen von n Veränderlichen anzusehen ist. Dagegen

hatte das innerhalb der Algebra von n Veränderlichen elementarere Trägheitsgesetz der quadratischen Formen zunächst kein Analogon für unendlichviele Veränderliche gefunden. Erst vor wenigen Jahren bemerkte A. Wintner[1]), daß man jede im Hilbertschen Sinne beschränkte reelle quadratische Form, die intakt[2]) ist, durch eine reelle intakte Transformation der Veränderlichen in eine Form $\mathfrak{D} = \sum_{i=1}^{\infty} d_i x_i^2$ überführen kann, wo die d_i nur die Werte $+1$, -1 oder 0 haben, und weiter, daß zwei solche Diagonalformen dann und nur dann ineinander transformierbar sind, wenn die Mengen der unter ihren Koeffizienten vorkommenden $+1$, $-1, 0$ bei beiden je die gleiche Kardinalzahl haben. G. Köthe [3]) hat dann entdeckt, daß *jede*, auch nicht-intakte, beschränkte reelle quadratische Form einer Form $\mathfrak{D}$ kongruent[4]) ist, wobei es aber nicht mehr angängig ist, die Werte der d_i auf $+1$, $-1, 0$ zu beschränken, und hat die einfachen Bedingungen angegeben, unter denen zwei Formen vom Typus $\mathfrak{D}$ kongruent sind. Auch *seine* Beweise beruhen wie die Wintnerschen auf der Spektraltheorie, wenn er auch aus dieser lediglich den Satz von F. Riesz benutzt, daß jede reelle quadratische Form die Differenz zweier definiter ist.

In der vorliegenden Arbeit, deren Entwurf entstanden war, bevor Köthes Resultate vorhanden waren, sollte das Trägheitsgesetz nicht im Hilbertschen Raum, sondern in anderen linearen Koordinatenräumen[5]), die einfacher sind, studiert werden. Abgesehen von dem Interesse, das die hier zu erwartenden Resultate an sich bieten würden, war das fernere Ziel, von diesen Studien aus besser ausgerüstet an den Hilbertschen Raum herantreten zu können. Dieses Ziel ist nun nicht etwa durch Köthes überraschendes Resultat weggefallen. Denn gerade, weil dieses Resultat so einfach ist, läßt es den Wunsch offen, eine Herleitung ohne Benutzung der Spektraltheorie, mit elementaren Mitteln, zu finden, wie ja auch bei n Veränderlichen das Trägheitsgesetz ohne Benutzung des Hauptachsentheorems bewiesen wird. Indem nun in der Tat die vorliegende Arbeit mit *völlig elementaren* Mitteln das Trägheitsgesetz im

[1]) Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 254—263.

[2]) Eine Matrix (Transformation) des Matrizenringes M heißt intakt, wenn sie in M eine eindeutige Reziproke besitzt.

[3]) Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 137—152.

[4]) Dies ist das kurze Wort von Frobenius [Journ. f. Math. **84** (1877), S. 22] für das Vorhandensein einer reellen intakten Transformation der einen quadratischen Form in die andere.

[5]) Wegen der Theorie dieser Räume vgl. Köthe-Toeplitz, Journ. f. Math. **171** (1934), S. 193—226; die vorliegende Arbeit benutzt allerdings diese Theorie nicht, sondern stützt sich lediglich auf die voraufgehende Arbeit derselben beiden Autoren über halbfinite Matrizen, Journ. f. Math. **165** (1931), S. 116—127.

halbfiniten[6]) Raum aufstellt und beweist, darf sie auch jetzt noch als methodische Vorbereitung auf jenes fernere Ziel betrachtet werden.

Bei der Übertragung der Theorie der quadratischen Formen vom Hilbertschen Raum auf andere lineare Koordinatenräume ergibt sich auf den ersten Blick eine Schwierigkeit, die darin begründet ist, daß bei keinem anderen unendlichen linearen Koordinatenraum außer dem Hilbertschen der zugehörige Matrizenring mit jeder Matrix $\mathfrak{P}$ *stets* auch die transponierte $\mathfrak{P}'$ enthält[7]). Und deshalb ist es nicht ohne weiteres klar, wie in diesen Räumen die Definition der Kongruenz zweier Formen, die im Hilbertschen Raum $\mathfrak{P}'\mathfrak{A}\,\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ lautet und die der Symmetrie der Formen, die dort $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ lautet, zu fassen ist. Es gibt zwei Wege, um dieses Hindernis zu überwinden, von denen mir der eine von Herrn Köthe, der andere von Herrn Toeplitz gewiesen wurde; beide laufen letzten Endes auf dasselbe hinaus.

Bei dem einen Weg betrachtet man nicht *solche* quadratische Formen, deren Matrix dem zum Raum λ gehörigen Matrizenring angehört, sondern *solche*, deren Matrix einer linearen Transformation entspricht, die den Raum λ in den dualen Raum λ^* oder einen Teil davon überführt. (Nur beim Hilbertschen Raum, dem einzigen, der gleich seinem dualen ist, fällt beides zusammen.) Da die Gesamtheit dieser Matrizen mit $\mathfrak{A}$ stets auch $\mathfrak{A}'$ enthält, kann die Definition der Symmetrie $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ ohne weiteres übernommen werden. Die Definition der Kongruenz dagegen muß lauten: $\mathfrak{P}'\mathfrak{A}\,\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$, wo $\mathfrak{P}$ den Raum λ und daher $\mathfrak{P}'$ den Raum λ^* intakt in sich überführt. Bedeutet z. B. λ den finiten Raum φ, so ist λ^* der Gesamtraum ω; jede *beliebige* Matrix führt φ in ω über. Demgemäß werden in diesem Falle quadratische Formen betrachtet, deren Koeffizientenmatrix eine ganz *beliebige* symmetrische, reelle Matrix ist; zwei solche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen kongruent, wenn es eine *zeilenfinite* intakte Matrix $\mathfrak{P}$ gibt, so daß $\mathfrak{P}'\mathfrak{A}\,\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ wird. Bedeutet λ den Gesamtraum ω, so ist $\lambda^* = \varphi$, so daß hier Formen mit endlicher Koeffizientenmatrix behandelt werden; das Trägheitsgesetz für endliche Formen erscheint also hier als Spezialfall unseres Problems.

Der andere Weg faßt nur solche Räume $\mu = \lambda + \lambda^*$ ins Auge, die aus einem Raum λ und seinem dualen λ^* zusammengesetzt sind, d. h. die Stellen haben die Gestalt

$$\mathfrak{x} = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \mid x_1, x_2, \ldots),$$

wo $(x_0, x_{-1}, x_{-2}, \ldots)$ eine Stelle aus λ und $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ eine Stelle aus λ^*

[6]) Der Begriff „halbfinit", der im übernächsten Absatz dieser Einleitung genauer erklärt wird, wurde von Köthe u. Toeplitz in der in Fußnote [5]) genannten Arbeit, Journ. f. Math. **165**, eingeführt.

[7]) Dies folgt aus der genannten Arbeit Journ. f. Math. **171** (1934), S. 206 (§ 6, Satz 4) und S. 216 (§ 12, Satz 2).

ist. (Ein Beispiel dafür ist eben unser halbfiniter Raum $\varphi + \omega = \psi$, bei dem die $x_0, x_{-1}, \ldots$ nur endlich viele Nichtnullen enthalten, während $x_1, x_2, \ldots$ völlig beliebig sind.) Die zu einem solchen Raum $\lambda + \lambda^* = \mu$ gehörigen Matrizen haben die Gestalt

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{-1,-1} & a_{-1,0} & a_{-1,1} & a_{-1,2} \\ \cdot & a_{0,-1} & a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ \hline \cdot & a_{1,-1} & a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ \cdot & a_{2,-1} & a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}^* \\ {}_*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}_* \end{pmatrix},$$

wo sich die einzelnen Bestandteile folgendermaßen beschreiben lassen: ${}^*\mathfrak{A}$ ist die Matrix einer Substitution, die λ in sich überführt, $\mathfrak{A}_*$ die einer solchen, die λ^* in sich überführt, ${}_*\mathfrak{A}$ die einer solchen, die λ in λ^* überführt, endlich $\mathfrak{A}^*$ die einer solchen, die λ^* in λ überführt. Um nun in diesen Räumen quadratische Formen einzuführen, bezeichne man mit $\tilde{\mathfrak{x}}$ die Stelle $(\ldots, \tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_0 \mid \tilde{x}_1, \ldots)$, wo $\tilde{x}_i = x_{-i+1}$ ist, also

$$\tilde{\mathfrak{x}} = (\ldots, x_2, x_1 \mid x_0, x_{-1}, x_{-2}, \ldots);$$

dann existiert, da $\tilde{\mathfrak{x}}$ in $\mu^* = \lambda^* + \lambda$ liegt, $\tilde{\mathfrak{x}}\,(\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}) = (\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{A})\,\mathfrak{x} = \sum_{\varkappa,\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\varkappa,\lambda}\,\tilde{x}_\varkappa\,x_\lambda$ für jedes $\mathfrak{x}$ aus μ. An Stelle der Symmetrie an der Hauptdiagonalen ist hier sinngemäß $a_{\varkappa,\lambda} = a_{-\lambda+1,-\varkappa+1}$ zu fordern, d. h. Symmetrie an der Nebendiagonalen. Tut man das, so wird die so entstandene Form durch jede intakte lineare Substitution $\mathfrak{x} = \mathfrak{P}\,\mathfrak{y}$, die μ in sich überführt, in eine Form $\tilde{\mathfrak{y}}\,(\widetilde{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{P})\,\mathfrak{y} = \tilde{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{y}$ der gleichen Art übergeführt[8]). Während also bei dem ersten Weg die Symmetrie in der herkömmlichen Weise bestehen bleibt, haben wir hier die veränderte Symmetrieforderung; dagegen gehörten bei der Kongruenzdefinition des ersten Weges in $\mathfrak{P}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ die Matrizen $\mathfrak{P}', \mathfrak{A}, \mathfrak{P}$ alle verschiedenen Matrizensystemen an, wogegen beim zweiten Wege in $\widetilde{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ die Matrizen $\widetilde{\mathfrak{P}}, \mathfrak{A}, \mathfrak{P}$ wie beim Hilbertschen Raum alle dem nämlichen Ring angehören.

In Wahrheit ist es gleichbedeutend, ob man den ersten Weg für λ und λ^* getrennt durchführt, woraus dann leicht die Theorie für $\lambda + \lambda^*$ im Sinne des zweiten Weges abzuleiten ist, oder ob man für $\lambda + \lambda^*$ den zweiten Weg durchführt und daraus für λ, λ^* einzeln die Theorie im Sinne des ersten Weges folgert.

Indem die vorliegende Untersuchung sich in dem halbfiniten Raume $\varphi + \varphi^* = \varphi + \omega = \psi$ bewegt, hält sie sich der Form nach an den zweiten Weg. Hier, im Raum ψ, liegt die volle Auflösungstheorie der linearen

[8]) $\widetilde{\mathfrak{P}}$ entsteht aus $\mathfrak{P}$ durch Spiegelung an der Nebendiagonalen.

Gleichungssysteme vor [9]), und auf diese gestützt ist es möglich, das Trägheitsgesetz völlig zu bewältigen. Das Ergebnis ist folgendes: Jede bezüglich der Nebendiagonalen symmetrische, reelle, halbfinite Matrix ist kongruent zu einer vom Typus

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{N}}_* & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{N}_* \end{pmatrix},$$

wo $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonalelemente nur die Werte $+1$, $-1, 0$ haben, wo $\mathfrak{N}_*$ eine Einsermatrix ist, d. h. eine Matrix, die in jeder Reihe höchstens eine $+1$ enthält, sonst nur Nullen und wo $\tilde{\mathfrak{N}}_*$ aus $\mathfrak{N}_*$ durch Spiegelung an der Nebendiagonalen der Gesamtmatrix hervorgeht (Kap. II). Mit einem großen deutschen $\mathfrak{O}$ soll dabei hier wie auch im folgenden eine Nullmatrix bezeichnet werden, d. h. eine solche, deren Elemente alle Null sind. Diese Normalform wird in Kap. III noch weiter reduziert auf einen von acht Typen (vgl. S. 46—48), und dann wird gezeigt, daß keine zwei Matrizen aus diesen acht Typen kongruent sind. Dieser letztere Nachweis hat am meisten neue Gedankengänge erfordert. Das vorbereitende Kap. I beruht auf einem bekannten Hilfssatz von Frobenius [10]), den auf *unendliche* symmetrische Matrizen zu übertragen ebenfalls eine gewisse Schwierigkeit dargestellt hat.

Kapitel I.

Verallgemeinerung der Transformation von Lagrange.

A. Unter besonderen Voraussetzungen.

Das Ziel dieses Abschnittes ist der folgende

Satz 1 [11]): *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine unendliche symmetrische Matrix*

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

und gibt es in der Folge ihrer Abschnittsdeterminanten $A_1, A_2, \ldots$, *wo*

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

---

[9]) Siehe die in Fußnote [5]) erwähnte Arbeit, Journ. f. Math. **165**.

[10]) Journ. f. Math. **114** (1895), S. 193.

[11]) Zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen sei an dieser Stelle die Festsetzung getroffen, daß alle in dieser Arbeit vorkommenden Größen reell sein sollen.

ist, eine unendliche Teilfolge von nicht verschwindenden Determinanten, so gibt es eine spaltenfinite Matrix $\mathfrak{B}$ *mit spaltenfiniter Inversen* $\mathfrak{B}^{-1}$, *so daß*

$$\mathfrak{B}' \mathfrak{A} \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$$

wird, wo $\mathfrak{D}$ *eine Diagonalmatrix*

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & . & . \\ 0 & d_2 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

mit $d_i = \pm 1$, $(i = 1, 2, \ldots)$ *ist*[12]).

Zum Beweis werde ich zeigen, daß es eine spaltenfinite Matrix $\mathfrak{U}$ mit spaltenfiniter Inversen $\mathfrak{U}^{-1}$ und eine solche Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ der oben beschriebenen Art gibt, so daß

$$\mathfrak{U}' \mathfrak{D} \mathfrak{U} = \mathfrak{A}$$

wird. Setzt man $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}^{-1}$, so ergibt sich daraus die Behauptung.

I. Es sei nun gemäß der Voraussetzung

$$A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, A_{\alpha_3}, \ldots$$

$(\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots)$ eine unendliche Folge von Abschnittsdeterminanten, die alle von Null verschieden sind. Dann führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\mathfrak{A}_{\alpha_i} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,\alpha_i} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,\alpha_i} \\ . & . & . & . \\ a_{\alpha_i,1} & a_{\alpha_i,2} & . & a_{\alpha_i,\alpha_i} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}_{\alpha_i,\alpha_i} = \begin{pmatrix} a_{\alpha_{i-1}+1,\,\alpha_{i-1}+1} & a_{\alpha_{i-1}+1,\,\alpha_{i-1}+2} & . & a_{\alpha_{i-1}+1,\,\alpha_i} \\ a_{\alpha_{i-1}+2,\,\alpha_{i-1}+1} & a_{\alpha_{i-1}+2,\,\alpha_{i-1}+2} & . & a_{\alpha_{i-1}+2,\,\alpha_i} \\ . & . & . & . \\ a_{\alpha_i,\,\alpha_{i-1}+1} & a_{\alpha_i,\,\alpha_{i-1}+2} & . & a_{\alpha_i,\,\alpha_i} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}_{\alpha_{i-1},\,\alpha_i} = \begin{pmatrix} a_{1,\,\alpha_{i-1}+1} & a_{1,\,\alpha_{i-1}+2} & . & a_{1,\,\alpha_i} \\ a_{2,\,\alpha_{i-1}+1} & a_{2,\,\alpha_{i-1}+2} & . & a_{2,\,\alpha_i} \\ . & . & . & . \\ a_{\alpha_{i-1},\,\alpha_{i-1}+1} & a_{\alpha_{i-1},\,\alpha_{i-1}+2} & . & a_{\alpha_{i-1},\,\alpha_i} \end{pmatrix}.$$

Entsprechend bezeichnen wir auch die Teile von anderen Matrizen.

[12]) Die Multiplikation $\mathfrak{B}'\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist ausführbar und assoziativ, da alle auftretenden Summen nur endlich viele Glieder haben; denn „spaltenfinit" heißt, daß in jeder Spalte nur endlich viele Nichtnullen vorkommen.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen gehe ich nun dazu über, gegebenenfalls die vorkommenden Matrizen aus ihren Teilen aufzubauen. In diesem Sinne werde ich z. B. schreiben:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{\alpha_1} & * \\ * & * \end{pmatrix} \tag{1}$$

oder auch

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{\alpha_i} & \mathfrak{A}_{\alpha_i,\,\alpha_{i+1}} & * \\ \mathfrak{A}'_{\alpha_i,\,\alpha_{i+1}} & \mathfrak{A}_{\alpha_{i+1},\,\alpha_{i+1}} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei hier wie im folgenden Sterne immer solche Elemente oder Matrizen ersetzen sollen, auf die es im jeweiligen Zusammenhang nicht ankommt und an deren Vorhandensein nur erinnert werden soll.

Das Ausmultiplizieren von Matrizen, die alle nach dem gleichen Schema, entweder wie in (1) oder wie in (2) untergeteilt sind, kann nun auch in der Weise vollzogen werden, daß man die Teilmatrizen selbst als Elemente der Matrix auffaßt, und nun nach der gewöhnlichen Regel diese Matrizen von Matrizen ausmultipliziert, wobei aber streng auf die Reihenfolge der Faktoren der inneren Produkte zu achten ist. Dann ist das Resultat, wenn man von der Einteilung jetzt wieder absieht, das gleiche wie bei der gewohnten Multiplikation, wie man leicht verifiziert.

II. Der eigentliche Beweis beginnt nun damit, daß eine intakte Matrix $\mathfrak{U}_{\alpha_1}$ und eine Diagonalmatrix $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ mit $d_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, \alpha_1)$ so bestimmt werden, daß

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{U}'_{\alpha_1} & \mathfrak{O} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_{\alpha_1} & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_1} & * \\ \mathfrak{O} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{\alpha_1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

wird. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß

$$\mathfrak{U}'_{\alpha_1}\, \mathfrak{D}_{\alpha_1}\, \mathfrak{U}_{\alpha_1} = \mathfrak{A}_{\alpha_1}$$

wird. Nach dem Reduktionssatz für endliche Matrizen gibt es aber eine solche Matrix $\mathfrak{U}_{\alpha_1}$ und eine Diagonalmatrix $\mathfrak{D}_{\alpha_1}$ mit $d_i = \pm 1$ oder 0 $(i = 1, 2, \ldots, \alpha_1)$, die diese Gleichung erfüllen. Da nun $\mathfrak{A}_{\alpha_1}$ intakt ist, so können auch auf der linken Seite der Gleichung nur intakte Matrizen stehen, so daß insbesondere kein $d_i = 0$ sein kann. Es ist also $d_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, \alpha_1)$.

Ich nehme nun an, daß schon eine intakte Matrix $\mathfrak{U}_{\alpha_n}$ und eine Diagonalmatrix $\mathfrak{D}_{\alpha_n}$ mit $d_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, \alpha_n)$ gefunden seien, so daß gilt:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{U}'_{\alpha_n} & \mathfrak{O} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_{\alpha_n} & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_n} & * \\ \mathfrak{O} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{\alpha_n} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Dann kann man eine reguläre Matrix $\mathfrak{U}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}}$, eine Matrix $\mathfrak{U}_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}}$

und eine Diagonalmatrix $\mathfrak{D}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}}$ mit $d_i = \pm 1\,(i = \alpha_n + 1, \alpha_n + 2, \ldots, \alpha_{n+1})$ so bestimmen, daß für die Matrizen

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_n} & \mathfrak{U}_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}} & * \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{U}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}} & * \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & * \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_{\alpha_n} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{D}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}} & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & * \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\mathfrak{U}'\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{\alpha_n} & \mathfrak{A}_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}} & * \\ \mathfrak{A}'_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}} & \mathfrak{A}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Denn dazu ist notwendig und hinreichend, daß folgende beiden Gleichungen gelten:

$$\mathfrak{U}'_{\alpha_n}\,\mathfrak{D}_{\alpha_n}\,\mathfrak{U}_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}} = \mathfrak{A}_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}},$$

$$\mathfrak{U}'_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}}\,\mathfrak{D}_{\alpha_n}\,\mathfrak{U}_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}} + \mathfrak{U}'_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}}\,\mathfrak{D}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}}\,\mathfrak{U}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}} = \mathfrak{A}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}}.$$

Da aber angenommen wurde, daß $\mathfrak{U}_{\alpha_n}$ und $\mathfrak{D}_{\alpha_n}$ regulär sind, so kann man einfach setzen:

$$\mathfrak{U}_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}} = \mathfrak{D}_{\alpha_n}^{-1}(\mathfrak{U}'_{\alpha_n})^{-1}\mathfrak{A}_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}}.$$

Nun wird die Matrix

$$\mathfrak{A}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}} - \mathfrak{U}'_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}}\,\mathfrak{D}_{\alpha_n}\,\mathfrak{U}_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}}$$

ins Auge gefaßt. Diese ist offenbar symmetrisch. Nach dem Reduktionssatz für endliche Matrizen gibt es also eine reguläre Matrix $\mathfrak{U}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}}$, so daß

$$\mathfrak{U}'_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}}\,\mathfrak{D}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}}\,\mathfrak{U}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}} = \mathfrak{A}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}} - \mathfrak{U}'_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}}\,\mathfrak{D}_{\alpha_n}\,\mathfrak{U}_{\alpha_n,\,\alpha_{n+1}}$$

wird, wo $\mathfrak{D}_{\alpha_{n+1},\,\alpha_{n+1}}$ eine Diagonalmatrix ist mit $d_i = \pm 1$ oder 0 $(i = \alpha_n + 1, \ldots, \alpha_{n+1})$. Da jetzt $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{D}$ die Beziehung (3) erfüllen, gilt die Gleichung

$$\mathfrak{U}'_{\alpha_{n+1}}\,\mathfrak{D}_{\alpha_{n+1}}\,\mathfrak{U}_{\alpha_{n+1}} = \mathfrak{A}_{\alpha_{n+1}},$$

wie man sieht, wenn man sinngemäß in vier Teile unterteilt und den linken oberen Teil betrachtet. Da auf der rechten Seite dieser Gleichung nach Voraussetzung eine intakte Matrix steht, so können auch links nur intakte Matrizen stehen; also ist $\mathfrak{U}_{\alpha_{n+1}}$ intakt und insbesondere ist $d_i = \pm 1$ $(i = 1, \ldots, \alpha_{n+1})$.

Damit ist erschöpfend dargetan, wie eine Matrix $\mathfrak{U}$, die die Beziehung $\mathfrak{U}'\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{U} = \mathfrak{A}$ erfüllt, rekursiv bestimmt werden kann. Wesentlich ist bei dieser Rekursion, daß die ersten α_n Spalten von $\mathfrak{U}$ so bestimmt werden, daß sie außer in dem Teil $\mathfrak{U}_{\alpha_n}$ nur Nullen enthalten (wodurch sich auch die Spalten-

finitheit ergibt) und daß alle Abschnittsdeterminanten U_{α_n} von Null verschieden werden. Denn nun können wir die Existenz einer eindeutigen spaltenfiniten, linksseitigen Reziproken $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{U}$ nachweisen.

III. Für das Bestehen der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{X}_{\alpha_1} & * \\ \mathfrak{R} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_1} & * \\ \mathfrak{O} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & * \\ \mathfrak{O} & * \end{pmatrix}$$

ist notwendig und hinreichend:

$$\mathfrak{X}_{\alpha_1} = \mathfrak{U}_{\alpha_1}^{-1}, \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{O}.$$

Angenommen, es sei nun $\mathfrak{X}_{\alpha_n}$ in eindeutiger Weise schon so bestimmt, daß

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{X}_{\alpha_n} & * \\ \mathfrak{O} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_n} & * \\ \mathfrak{O} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & * \\ \mathfrak{O} & * \end{pmatrix}$$

und es sei gezeigt, daß notwendig unter $\mathfrak{X}_{\alpha_n}$ eine Nullmatrix stehen muß. Für das Bestehen der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{X}_{\alpha_n} & \mathfrak{X}_{\alpha_n, \alpha_{n+1}} & * \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{X}_{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}} & * \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{R} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_{\alpha_n} & \mathfrak{U}_{\alpha_n, \alpha_{n+1}} & * \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{U}_{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}} & * \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{O} & * \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{E} & * \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & * \end{pmatrix}$$

ist dann notwendig und hinreichend:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{\alpha_n, \alpha_{n+1}} &= -\mathfrak{X}_{\alpha_n} \mathfrak{U}_{\alpha_n, \alpha_{n+1}} \mathfrak{U}_{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}}^{-1}, \\ \mathfrak{X}_{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}} &= \mathfrak{U}_{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}}^{-1}, \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{O}. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß eine Matrix $\mathfrak{X}$, die die Gleichung $\mathfrak{X}\,\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ erfüllt, rekursiv bestimmt werden kann, ferner, daß sie überhaupt nur in einer Weise bestimmt werden kann, also eindeutig ist, und daß sie ganz von selbst spaltenfinit wird. Hat aber eine Matrix $\mathfrak{U}$ in einem Ring (hier der Ring der spaltenfiniten Matrizen) eine eindeutige linksseitige Reziproke, so ist diese ihre eindeutige Inverse, so daß insbesondere auch $\mathfrak{U}\,\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ gilt. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

B. Die vorbereitenden Transformationen.

Um eine unendliche symmetrische Matrix, über die keinerlei Voraussetzungen gemacht sind, durch eine Transformation mit spaltenfiniter Matrix auf eine Diagonalmatrix zu reduzieren, werden zwei vorbereitende Transformationen benötigt, deren Existenz in den Sätzen 2 und 3 gezeigt werden soll.

Satz 2: *$\mathfrak{A}$ sei eine unendliche symmetrische Matrix. Dann gibt es eine spaltenfinite Matrix $\mathfrak{R}$ mit spaltenfiniter Inversen $\mathfrak{R}^{-1}$, so daß*

$$\mathfrak{R}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{B}$$

wird, wo $\mathfrak{B}$ *nach Wegstreichung aller darin vorhandenen Nullreihen in eine symmetrische Matrix* $\mathfrak{B}_1$ *übergeht, zwischen deren Zeilen (Spalten) keine endlichen linearen Dependenzen bestehen.*

Beweis. Die Matrix $\mathfrak{R}$ läßt sich wie folgt bestimmen: Die erste Spalte sei die Stelle $\mathfrak{e}_1$; die $\varkappa$-te Spalte sei die Stelle $\mathfrak{e}_\varkappa$, wenn die $\varkappa$-te Spalte $\mathfrak{f}_\varkappa$ von $\mathfrak{A}$ keine lineare Kombination der vorangehenden Spalten von $\mathfrak{A}$ ist[13]). Ist aber

$$\mathfrak{f}_\varkappa = r_{1\varkappa}\mathfrak{f}_1 + r_{2\varkappa}\mathfrak{f}_2 + \ldots + r_{\varkappa-1,\varkappa}\mathfrak{f}_{\varkappa-1},$$

so sei die $\varkappa$-te Spalte von $\mathfrak{R}$ die Stelle

$$(-r_{1\varkappa},\ -r_{2\varkappa},\ \ldots,\ -r_{\varkappa-1,\varkappa},\ 1, 0, 0, \ldots).$$

Die Existenz von $\mathfrak{R}^{-1}$ wird dann durch die gleiche Schlußweise wie in Abschnitt A. geliefert; denn hier sind offenbar alle Abschnittsdeterminanten von Null verschieden. Bildet man $\mathfrak{A}\mathfrak{R}$, so bleiben die erste und diejenigen Spalten von $\mathfrak{A}$, die nicht eine lineare Kombination der vorangehenden waren, unverändert, während die übrigen durch $\mathfrak{o}$, d. i. die Stelle $(0, 0, 0, \ldots)$, ersetzt werden. $\mathfrak{R}'\mathfrak{A}\mathfrak{R}$ entsteht dann aus $\mathfrak{A}\mathfrak{R}$ durch Nullsetzen aller derjenigen Zeilen, die in $\mathfrak{A}$ lineare Kombinationen der vorangehenden waren. Streicht man nun die Nullreihen, so hat die übrigbleibende Matrix $\mathfrak{B}_1$ die Eigenschaft, daß keine linearen Dependenzen zwischen ihren Spalten (Zeilen) bestehen. Denn sind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ die Indizes der Spalten von $\mathfrak{A}$, die nicht eine lineare Kombination der vorangehenden waren, und würde eine lineare Dependenz zwischen endlich vielen Spalten von $\mathfrak{B}_1$ bestehen, so würde eine Gleichung

$$c_{\gamma_1}\mathfrak{f}'_{\gamma_1} + c_{\gamma_2}\mathfrak{f}'_{\gamma_2} + \ldots + c_{\gamma_n}\mathfrak{f}'_{\gamma_n} = \mathfrak{o}$$

mit $c_{\gamma_n} = -1$ gelten, wo $\mathfrak{f}'_{\gamma_i}$ diejenige Stelle ist, die aus $\mathfrak{f}_{\gamma_i}$ entsteht, wenn man darin die Koordinaten mit den Indizes, die von $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ verschieden sind, durch Null ersetzt. Dann wäre aber auch

$$c_{\gamma_1}\mathfrak{f}_{\gamma_1} + c_{\gamma_2}\mathfrak{f}_{\gamma_2} + \ldots + c_{\gamma_n}\mathfrak{f}_{\gamma_n} = \mathfrak{o},$$

denn die dazu noch fehlenden Relationen wären wegen der Abhängigkeit der ausgefallenen Zeilen von den vorangehenden von selbst mit erfüllt, wie man, mit der ersten Koordinate beginnend, leicht überlegt. Es wäre dann schließlich

$$\mathfrak{f}_{\gamma_n} = c_{\gamma_1}\mathfrak{f}_{\gamma_1} + c_{\gamma_2}\mathfrak{f}_{\gamma_2} + \ldots + c_{\gamma_{n-1}}\mathfrak{f}_{\gamma_{n-1}}$$

entgegen der Annahme, daß $\mathfrak{f}_{\gamma_n}$ nicht eine lineare Kombination der vorangehenden sein sollte. Damit ist Satz 2 bewiesen.

[13]) $\mathfrak{e}_i$ bedeutet diejenige Stelle, deren i-te Koordinate gleich $+1$ ist, während alle übrigen Koordinaten gleich Null sind.

Satz 3: *Ist $\mathfrak{A}$ eine unendliche symmetrische Matrix, zwischen deren Zeilen (Spalten) keine endlichen linearen Dependenzen bestehen, so gibt es eine Permutationsmatrix $\mathfrak{P}$, so daß*

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$$

wird, wo in $\mathfrak{B}$ nie zwei aufeinanderfolgende Abschnittsdeterminanten verschwinden. Dabei ist $\mathfrak{P}$ spaltenfinit und hat eine spaltenfinite Inverse $\mathfrak{P}^{-1}$.

Dem Beweise werden zwei Hilfssätze vorausgeschickt. Darin wird mit $B^{(p)}_{\alpha,\beta}$ folgende Unterdeterminante von $\mathfrak{A}$ bezeichnet:

$$B^{(p)}_{\alpha,\beta} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & a_{1,p} & a_{1,\beta} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & a_{2,p} & a_{2,\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdot & a_{p,p} & a_{p,\beta} \\ a_{\alpha,1} & a_{\alpha,2} & \cdot & a_{\alpha,p} & a_{\alpha,\beta} \end{vmatrix}.$$

Dann heißt der

Hilfssatz 1: *Ist in der unendlichen Matrix $\mathfrak{A}$ die p-te Abschnittsdeterminante A_p von Null verschieden, während alle Determinanten $B^{(p)}_{p+1,\varrho}$ ($\varrho = p+1$, $p+2$, ...) verschwinden, so sind die $p+1$ ersten Zeilen von $\mathfrak{A}$ linear abhängig.*

Beweis. Wegen $B^{(p)}_{p+1,p+1} = 0$ gibt es $p+1$ Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_{p+1}$, die nicht alle verschwinden, so daß

$$c_1 a_{1\lambda} + c_2 a_{2\lambda} + \ldots + c_{p+1} a_{p+1,\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p+1). \tag{1}$$

Jetzt sei ϱ ein fester Index $> p+1$. Wegen $A_p \neq 0$ sind die Spalten von A_p linear unabhängig, also auch die ersten p Spalten von $B^{(p)}_{p+1,\varrho}$. Da aber außerdem $B^{(p)}_{p+1,\varrho} = 0$ ist, so gibt es p Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_p$, so daß

$$k_1 a_{\varkappa 1} + k_2 a_{\varkappa 2} + \ldots + k_p a_{\varkappa p} = a_{\varkappa\varrho} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p+1).$$

Also wird

$$\sum_{\varkappa=1}^{p+1} c_\varkappa a_{\varkappa\varrho} = \sum_{\varkappa=1}^{p+1} c_\varkappa \sum_{\lambda=1}^{p} k_\lambda a_{\varkappa\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{p} k_\lambda \sum_{\varkappa=1}^{p+1} c_\varkappa a_{\varkappa\lambda} = 0,$$

denn nach (1) ist $\sum_{\varkappa=1}^{p+1} c_\varkappa a_{\varkappa\lambda} = 0$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, p$). Also gilt (1) für jedes λ, d. h. die ersten $p+1$ Zeilen sind linear abhängig, w. z. b. w.

Hilfssatz 2: *Ist in einer unendlichen symmetrischen Matrix $\mathfrak{A}$ die p-te Abschnittsdeterminante A_p von Null verschieden, verschwinden dagegen A_{p+1} sowie alle Determinanten $B^{(p+1)}_{\varrho,\varrho}$ ($\varrho = p+2$, $p+3$, ...), so verschwinden auch alle Determinanten $B^{(p)}_{p+1,\varrho}$ ($\varrho = p+1$, $p+2$, ...).*

Beweis[14]). Wendet man den Determinantensatz von Sylvester auf $B^{(p+1)}_{\varrho,\varrho}$ $(\varrho = p+2,\ p+3,\ \ldots)$ an, so folgt

$$B^{(p)}_{p+1,\,p+1}\,B^{(p)}_{\varrho,\varrho} - B^{(p)}_{\varrho,\,p+1}\,B^{(p)}_{p+1,\,\varrho} = A_p\,B^{(p+1)}_{\varrho,\varrho} = 0.$$

Da nun $B^{(p)}_{p+1,\,p+1} = A_{p+1} = 0$ und wegen der Symmetrie $B^{(p)}_{\varrho,\,p+1} = B^{(p)}_{p+1,\,\varrho}$ ist, so folgt $B^{(p)}_{p+1,\varrho} = 0$ $(\varrho = p+2,\ p+3,\ \ldots)$, w. z. b. w.

Ist also $A_p \neq 0$, $A_{p+1} = 0$ und würden alle $B^{(p+1)}_{\varrho,\varrho}$ $(\varrho = p+2,\ p+3,\ \ldots)$ verschwinden, so wären nach Hilfssatz 2 alle $B^{(p)}_{p+1,\,\varrho} = 0$ $(\varrho = p+1,\ p+2,\ \ldots)$, so daß nach Hilfssatz 1 die ersten $p+1$ Zeilen linear abhängig wären. Soll dies nicht sein, so muß also ein $B^{(p+1)}_{\varrho,\varrho} \neq 0$ sein. Setzt man also die ϱ-te Zeile (Spalte) an die Stelle der $(p+2)$-ten und rückt die dazwischenliegenden um eins nach unten (rechts), so wird durch diese einfache Vertauschung die $(p+2)$-te Abschnittsdeterminante von Null verschieden, während alle vorhergehenden Abschnittsdeterminanten ihre Werte beibehalten.

Beweis von Satz 3. Ist $a_{11} \neq 0$, so bleibt die erste Zeile (Spalte) unberührt. Ist $a_{11} = 0$, so ist von den Unterdeterminanten $a_{11}a_{\alpha\alpha} - a^2_{1\alpha} = -a^2_{1\alpha}$ sicher eine von Null verschieden, da sonst entgegen der Voraussetzung die erste Zeile aus lauter Nullen bestände. Setzt man also die α-te Zeile (Spalte) an die Stelle der zweiten, so wird die zweite Abschnittsdeterminante von Null verschieden. Dieses Verfahren kann nach dem oben Gesagten in infinitum fortgesetzt werden; es hat die Eigenschaft, daß die $(n-1)$-te Zeile (Spalte) mindestens unter den $2n$ ersten Zeilen (Spalten) der permutierten Matrix ihren Platz erhält, womit die Umkehrbarkeit der Permutation gesichert ist. Einer solchen Permutation entspricht nun eine Matrix $\mathfrak{P}$, welche in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine $+1$, sonst lauter Nullen hat, und zwar in der Weise, daß $\mathfrak{P}'\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ diejenige Matrix wird, welche durch gleichzeitige Anwendung dieser Permutation auf Zeilen und Spalten aus $\mathfrak{A}$ hervorgeht. $\mathfrak{P}$ ist dabei ganz von selbst spaltenfinit und hat die Inverse $\mathfrak{P}'$, welche ebenfalls spaltenfinit ist. Damit ist Satz 3 bewiesen.

C. Der allgemeine Fall.

Satz 4: *Ist $\mathfrak{A}$ eine unendliche symmetrische Matrix, so gibt es eine spaltenfinite Matrix $\mathfrak{S}$ mit spaltenfiniter Inversen $\mathfrak{S}^{-1}$, so daß*

$$\mathfrak{S}'\mathfrak{A}\mathfrak{S} = \mathfrak{D}$$

[14]) Vgl. die in Fußnote [10]) erwähnte Arbeit, S. 189.

wird, wo $\mathfrak{D}$ *eine Diagonalmatrix*

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & . & . \\ 0 & d_2 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

mit $d_i = \pm 1$ *oder* 0 $(i = 1, 2, \ldots)$ *ist.*

Beweis. Nach Satz 2 gibt es eine spaltenfinite Matrix $\mathfrak{R}$ mit spaltenfiniter Inversen $\mathfrak{R}^{-1}$, so daß

$$\mathfrak{R}' \mathfrak{A} \mathfrak{R} = \mathfrak{B}$$

wird, wo $\mathfrak{B}$ nach Wegstreichung aller Nullreihen in eine symmetrische Matrix $\mathfrak{B}_1$ übergeht, zwischen deren Zeilen (Spalten) keine endlichen linearen Dependenzen bestehen. $\mathfrak{B}_1$ erfüllt also die Voraussetzung von Satz 3; also gibt es eine spaltenfinite Matrix $\mathfrak{P}$ mit spaltenfiniter Inversen $\mathfrak{P}^{-1}$, so daß

$$\mathfrak{P}' \mathfrak{B}_1 \mathfrak{P} = \mathfrak{C}_1$$

wird, wo bei $\mathfrak{C}_1$ in der Folge der Abschnittsdeterminanten nie zwei aufeinanderfolgende verschwinden. $\mathfrak{C}_1$ erfüllt also die Voraussetzung von Satz 1; daher gibt es eine spaltenfinite Matrix $\mathfrak{U}$ mit spaltenfiniter Inversen $\mathfrak{U}^{-1}$, so daß

$$\mathfrak{U}' \mathfrak{C}_1 \mathfrak{U} = \mathfrak{D}_1$$

wird, wo $\mathfrak{D}_1$ eine Diagonalmatrix

$$\mathfrak{D}_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & . & . \\ 0 & d_2 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

mit $d_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ist. Setzt man also $\mathfrak{P}\mathfrak{U} = \mathfrak{Q}_1$, so ist

$$\mathfrak{Q}_1' \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{D}_1,$$

wobei $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_1^{-1} = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{P}^{-1}$ spaltenfinit sind auf Grund der Ringeigenschaft der spaltenfiniten Matrizen. Nun werde $\mathfrak{B}_1$ durch Einfügen von Nullreihen zu $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}_1$ entsprechend zu einer Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ ergänzt, während $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_1^{-1}$ in der gleichen Weise zu $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{X}$ ergänzt werden, nur mit dem Unterschied, daß in den einzufügenden Reihen auf der Diagonalen $+1$ statt Null gesetzt wird. Dann wird offenbar $\mathfrak{X} = \mathfrak{Q}^{-1}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}^{-1}$ spaltenfinit und es gilt

$$\mathfrak{Q}' \mathfrak{B} \mathfrak{Q} = \mathfrak{D},$$

wo

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & . & . \\ 0 & d_2 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

mit $d_i = \pm 1$ oder 0 $(i = 1, 2, \ldots)$. Setzt man nun noch $\mathfrak{R}\mathfrak{Q} = \mathfrak{S}$, so folgt unter abermaliger Benutzung der Ringeigenschaft der spaltenfiniten Matrizen die Behauptung.

Kapitel II.

Der Reduktionssatz.

A. Erklärung der Begriffe.

Die halbfiniten Matrizen[15]), welche im folgenden der Gegenstand der Untersuchung sein sollen, haben die Gestalt

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{-1,-1} & a_{-1,0} & a_{-1,1} & a_{-1,2} & \cdot \\ \cdot & a_{0,-1} & a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \cdot \\ \hline \cdot & a_{1,-1} & a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot \\ \cdot & a_{2,-1} & a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}^* \\ {}_*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}_* \end{pmatrix},$$

wo ${}^*\mathfrak{A}$ spaltenfinit, $\mathfrak{A}_*$ zeilenfinit, ${}_*\mathfrak{A}$ beliebig und $\mathfrak{A}^*$ endlich ist. Die Gesamtheit der halbfiniten Matrizen hat die Ringeigenschaft und die Multiplikation zweier halbfiniten Matrizen kann wie bei den untergeteilten Matrizen in Kapitel I durch Ausmultiplizieren der zweireihigen Matrizen von Matrizen geschehen:

$$\begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}^* \\ {}_*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}_* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{B} & \mathfrak{B}^* \\ {}_*\mathfrak{B} & \mathfrak{B}_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}\,{}^*\mathfrak{B} + \mathfrak{A}^*\,{}_*\mathfrak{B} & {}^*\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}^* + \mathfrak{A}^*\,\mathfrak{B}_* \\ {}_*\mathfrak{A}\,{}^*\mathfrak{B} + \mathfrak{A}_*\,{}_*\mathfrak{B} & {}_*\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}^* + \mathfrak{A}_*\,\mathfrak{B}_* \end{pmatrix}.$$

Entsteht die Matrix $\mathfrak{B}$ aus der halbfiniten Matrix $\mathfrak{A}$ durch Spiegelung derselben an der von rechts oben nach links unten verlaufenden Nebendiagonalen, so wird

$$\mathfrak{B} = \tilde{\mathfrak{A}} = (\tilde{a}_{\alpha\beta})$$

gesetzt; $\tilde{\mathfrak{A}}$ wird ebenfalls halbfinit, da die Bedingung der Halbfinitheit ihrem Charakter nach symmetrisch zur Nebendiagonalen ist. $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ hängen durch die Formeln

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} = a_{-\beta+1,-\alpha+1} \qquad (\alpha, \beta = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

[15]) Vgl. Fußnote [6]).

zusammen. Durch dieselben Formeln wird offenbar auch der Matrix $^*\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}^*$, ${}_*\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_*$) eine Matrix $^*\widetilde{\mathfrak{A}}$ ($\widetilde{\mathfrak{A}}^*$, ${}_*\widetilde{\mathfrak{A}}$, $\widetilde{\mathfrak{A}}_*$) zugeordnet, wodurch folgende Schreibweise ermöglicht wird:

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{A}}_* & \widetilde{\mathfrak{A}}^* \\ {}_*\widetilde{\mathfrak{A}} & {}^*\widetilde{\mathfrak{A}} \end{pmatrix}.$$

Auf Grund der Formeln verifiziert man leicht die Relationen

$$(\widetilde{\widetilde{\mathfrak{A}}}) = \mathfrak{A}, \quad (\widetilde{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}) = \widetilde{\mathfrak{B}}\,\widetilde{\mathfrak{A}}, \quad (\widetilde{\mathfrak{A}^{-1}}) = (\widetilde{\mathfrak{A}})^{-1}.$$

Desgleichen für gesternte Matrizen.

Definition. Die Matrix $\mathfrak{A}$ heißt nebensymmetrisch, wenn $\mathfrak{A} = \widetilde{\mathfrak{A}}$ ist. Ebenso heißt $\mathfrak{A}^*$ (${}_*\mathfrak{A}$) nebensymmetrisch, wenn $\mathfrak{A}^* = \widetilde{\mathfrak{A}}^*$ (${}_*\mathfrak{A} = {}_*\widetilde{\mathfrak{A}}$) ist.

Für die Nebensymmetrie von $\mathfrak{A}$ ist offenbar notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{A}^*$ und ${}_*\mathfrak{A}$ nebensymmetrisch sind, und daß $^*\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}_*$ ist.

Ist $\mathfrak{A}$ eine nebensymmetrische halbfinite Matrix und bildet man mit einer halbfiniten Matrix $\mathfrak{P}$ das Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$, so ist auch $\mathfrak{B}$ nebensymmetrisch, denn

$$\widetilde{\mathfrak{B}} = \widetilde{\mathfrak{P}}\,\widetilde{\mathfrak{A}}\,\widetilde{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}.$$

Definition. Zwei nebensymmetrische halbfinite Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen kongruent, wenn es eine halbfinite Matrix $\mathfrak{P}$ mit halbfiniter Inversen $\mathfrak{P}^{-1}$ gibt, so daß

$$\widetilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$$

ist.

Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation und bewirkt somit unter den nebensymmetrischen halbfiniten Matrizen eine Klasseneinteilung. Das Ziel des folgenden ist nun, ein vollständiges Repräsentantensystem dieser Klassen anzugeben, d. h. ein solches System nebensymmetrischer Matrizen, welches aus jeder Klasse eine und nur eine Matrix enthält. Dieses Ziel wird in zwei Schritten erreicht: Erstens (Kapitel II, C) wird gezeigt, daß sich in jeder Klasse solche Matrizen befinden, die wir Normalformen nennen (Reduktionssatz):

Definition. Die nebensymmetrische halbfinite Matrix

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{N} & \mathfrak{N}^* \\ {}_*\mathfrak{N} & \mathfrak{N}_* \end{pmatrix}$$

heißt Normalform, wenn

1. $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{O}$,
2. $\mathfrak{N}_*$ eine Einsermatrix ist, d. h. eine solche, die in jeder Zeile und in jeder Spalte höchstens eine $+1$ enthält, sonst lauter Nullen, und die nach Wegstreichung aller in ihr vorkommenden Nullreihen in eine Diagonalmatrix übergeht ($^*\mathfrak{N} = \widetilde{\mathfrak{N}}_*$ ist dann ebenfalls eine Einsermatrix),

3. ${}_*\mathfrak{N}$ eine Diagonalmatrix

$$ {}_*\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} . & . & 0 & d_1 \\ . & . & d_2 & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} $$

ist mit $d_i = \pm 1$ oder 0 und wenn

4. in jeder Zeile und in jeder Spalte der Gesamtmatrix $\mathfrak{N}$ höchstens ein von Null verschiedenes Element steht.

Zweitens (Kapitel III) wird dann aus diesen Normalformen ein vollständiges Repräsentantensystem ausgewählt. Ein solches Repräsentantensystem aus Normalformen wird dann ein kanonisches System von Normalformen genannt.

B. Ein besonders einfacher Fall des Reduktionssatzes.

Das Ergebnis von Satz 4, Kapitel I kann nun in neuer Schreibweise so ausgesprochen werden: Zu jeder nebensymmetrischen Matrix ${}_*\mathfrak{A}$ gibt es eine spaltenfinite Matrix $^*\mathfrak{P}$ mit spaltenfiniter Inversen $^*\mathfrak{P}^{-1}$, so daß

$$ {}^*\tilde{\mathfrak{P}}\, {}_*\mathfrak{A}\, {}^*\mathfrak{P} = {}_*\mathfrak{D} $$

wird, wo ${}_*\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix

$$ {}_*\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} . & . & 0 & d_1 \\ . & . & d_2 & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} $$

mit $d_i = +1$ oder 0 ($i = 1, 2, \ldots$) ist. Daraus folgt unmittelbar für halbfinite Matrizen der

Satz 5. *Ist*

$$ \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{A} & \mathfrak{O} \end{pmatrix} $$

eine nebensymmetrische Matrix, so gibt es eine halbfinite Matrix $\mathfrak{P}$ *mit halbfiniter Inversen* $\mathfrak{P}^{-1}$, *so daß*

$$ \tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D} & \mathfrak{O} \end{pmatrix} $$

wird, wo ${}_*\mathfrak{D}$ *die obige Bedeutung hat.*

Beweis. Wählt man $^*\mathfrak{P}$ im Sinne der obigen Bemerkung und setzt

$$ \mathfrak{P} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{P} & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}, $$

so wird

$$\mathfrak{P}^{-1} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{P}^{-1} & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{E} \end{pmatrix};$$

$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^{-1}$ sind beide halbfinit und es gilt:

$$\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}^*\mathfrak{P}\,{}_*\mathfrak{A}\,{}^*\mathfrak{P} & \mathfrak{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D} & \mathfrak{O} \end{pmatrix} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

C. Beweis des Reduktionssatzes im allgemeinen Fall.

Der Beweis ist in vier Schritte gegliedert, von denen die ersten drei als Hilfssätze vorweggenommen werden.

Hilfssatz 1: *Ist $\mathfrak{A}$ eine halbfinite Matrix, so gibt es eine halbfinite Matrix $\mathfrak{J}_p$ mit halbfiniter Inversen $\mathfrak{J}_p^{-1}$, so daß*

$$\mathfrak{J}_p\mathfrak{A}\mathfrak{J}_p = \mathfrak{A}_1$$

aus $\mathfrak{A}$ dadurch entsteht, daß alle Elemente um p Stellen nach links und nach unten gerückt werden. Da nun $\mathfrak{A}^*$ endlich ist, so wird bei hinreichend großem p $\mathfrak{A}_1^* = \mathfrak{O}$.

Beweis. Setzt man

$$\mathfrak{J}_1 = \left(\begin{array}{cccc|cc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \hline \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

und $\mathfrak{J}_p = \mathfrak{J}_1^p$, so wird $\mathfrak{J}_1^{-1} = \mathfrak{J}_1'$, $\mathfrak{J}_p^{-1} = \mathfrak{J}_p'$ und $\mathfrak{F}_p = \mathfrak{J}_p$; $\mathfrak{J}_p$ und $\mathfrak{J}_p^{-1}$ sind für jedes p halbfinit und es gilt

$$\mathfrak{F}_1\mathfrak{A}\mathfrak{J}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{-1,0} & a_{-1,1} & a_{-1,2} & \cdot \\ \hline \cdot & a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \cdot \\ \cdot & a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right),$$

so daß $\mathfrak{J}_p$ das Gewünschte leistet.

Hilfssatz 2. *Ist $\mathfrak{A}_1$ eine halbfinite nebensymmetrische Matrix mit $\mathfrak{A}_1^* = \mathfrak{O}$, so gibt es eine halbfinite Matrix $\mathfrak{P}_1$ mit halbfiniter Inversen $\mathfrak{P}_1^{-1}$, so daß*

$$\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{A}_2$$

wird, wo $\mathfrak{A}_2^* = \mathfrak{O}$ und ${}^*\mathfrak{A}_2$ eine Einsermatrix ist: $\mathfrak{A}_{2*} = {}^*\mathfrak{A}_2$ ist dann ebenfalls eine Einsermatrix.

Beweis. Nach der Äquivalenztheorie für zeilenfinite Matrizen[16]) gibt es zwei zeilenfinite Matrizen $^*\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_{1*}$ mit zeilenfiniten Inversen $^*\mathfrak{P}_1^{-1}$ und $\mathfrak{P}_{1*}^{-1}$, so daß $^*\mathfrak{P}_1 \mathfrak{A}_{1*} \mathfrak{P}_{1*}$ eine Einsermatrix wird. Setzt man

$$\mathfrak{P}_1 = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{P}_1 & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{P}_{1*} \end{pmatrix},$$

so wird

$$\mathfrak{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{P}_1^{-1} & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{P}_{1*}^{-1} \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\mathfrak{P}_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_{1*} {}^*\mathfrak{A}_1 {}^*\mathfrak{P}_1 & \mathfrak{O} \\ {}^*\mathfrak{P}_1 {}_*\mathfrak{A}_1 {}^*\mathfrak{P}_1 & {}^*\mathfrak{P}_1 \mathfrak{A}_{1*} \mathfrak{P}_{1*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_2 & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_{2*} \end{pmatrix},$$

d. h. es wird $\mathfrak{A}_2^* = \mathfrak{O}$ und $\mathfrak{A}_{2*} = {}^*\mathfrak{P}_1 \mathfrak{A}_{1*} \mathfrak{P}_{1*}$ wird eine Einsermatrix, w. z. b. w.

Hilfssatz 3. *Ist* $\mathfrak{A}_2 = (a_{\alpha\beta}^{(2)})$ *eine nebensymmetrische Matrix, bei der* $\mathfrak{A}_2^* = \mathfrak{O}$ *und* $\mathfrak{A}_{2*}$ *eine Einsermatrix ist, so gibt es eine halbfinite Matrix* $\mathfrak{P}_2$ *mit halbfiniter Inversen* $\mathfrak{P}_2^{-1}$, *so daß*

$$\mathfrak{P}_2 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{A}_3 = (a_{\alpha\beta}^{(3)})$$

aus $\mathfrak{A}_2$ *in der Weise hervorgeht, daß die Elemente aller derjenigen Zeilen von* ${}_*\mathfrak{A}_2$, *in denen rechts in* $\mathfrak{A}_{2*}$ *eine* $+1$ *steht, und die Elemente aller derjenigen Spalten von* ${}_*\mathfrak{A}_2$, *in denen oben in* $^*\mathfrak{A}_2$ *eine* $+1$ *steht, durch Nullen ersetzt werden.*

Beweis. Die Indizes derjenigen Elemente von $^*\mathfrak{A}_2$, welche gleich -1 sind, seien nach wachsenden Beträgen geordnet,

$$\varkappa_1, \lambda_1; \quad \varkappa_2, \lambda_2; \quad \varkappa_3, \lambda_3; \quad \ldots;$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sei die Komplementärmenge zur Menge $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$, die dieselbe zur Menge $0, -1, -2, \ldots$ ergänzt; im selben Sinne sei $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ die Komplementärmenge zur Menge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$. Dann sei ${}_*\mathfrak{M}$ folgende Matrix:

In den Zeilen mit den Indizes $-\alpha_i + 1$ sei für alle λ

$$m_{-\alpha_i+1,\lambda} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

In den Zeilen mit den Indizes $-\varkappa_i + 1$ sei

1. wenn es sich um eine Spalte λ_k handelt:

$$m_{-\varkappa_i+1,\lambda_k} = -\frac{a^{(2)}_{-\lambda_i+1,\lambda_k}}{2},$$

2. wenn es sich um eine Spalte β_k handelt:

$$m_{-\varkappa_i+1,\beta_k} = -a^{(2)}_{-\lambda_i+1,\beta_k}.$$

[16]) O. Toeplitz, Pal. Rend. **28** (1909), S. 88—96.

Nun wird gesetzt

$$\mathfrak{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{M} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}.$$

Dann ist offenbar

$$\mathfrak{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{O} \\ -{}_*\mathfrak{M} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}$$

und es wird

$$\mathfrak{P}_2 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{P}_2 = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_2 & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{M}\,{}^*\mathfrak{A}_2 + {}_*\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_{2*}\,{}_*\mathfrak{M} & \mathfrak{A}_{2*} \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_3.$$

Nun wird die $\varkappa$-te Zeile von ${}_*\mathfrak{A}_3$ ins Auge gefaßt.

1. Sei $\varkappa = -\lambda_i + 1$. Dann enthält $\mathfrak{A}_{2*}$ in der $\varkappa$-ten Zeile eine $+1$ in der $(-\varkappa_i + 1)$-ten Spalte, sonst lauter Nullen. Die $\varkappa$-te Zeile von $\mathfrak{A}_{2*}\,{}_*\mathfrak{M}$ ist also die $(-\varkappa_i + 1)$-te Zeile von ${}_*\mathfrak{M}$.

   a) ${}_*\mathfrak{M}$ hat in der $\varkappa$-ten Zeile die λ_i-te Spalte von ${}_*\mathfrak{M}$; ist also $\lambda = \lambda_k$, so hat ${}_*\mathfrak{M}\,{}^*\mathfrak{A}_2$ in der $\varkappa$-ten Zeile und der λ-ten Spalte das Element $m_{-\varkappa_k+1,\lambda_i}$, da dieses beim Ausmultiplizieren auf die $+1$ in ${}^*\mathfrak{A}_2$ trifft, die an der Stelle $\varkappa_k$, λ_k steht. Also wird in diesem Falle

$$a^{(3)}_{\varkappa\lambda} = m_{-\varkappa_k+1,\lambda_i} + a^{(2)}_{-\lambda_i+1,\lambda_k} + m_{-\varkappa_i+1,\lambda_k}$$
$$= -\frac{a^{(2)}_{-\lambda_i+1,\lambda_k}}{2} + a^{(2)}_{-\lambda_i+1,\lambda_k} - \frac{a^{(2)}_{-\lambda_i+1,\lambda_k}}{2} = 0.$$

   b) Ist $\lambda = \beta_k$, so trifft die $\varkappa$-te Zeile von ${}_*\mathfrak{M}$ auf eine Nullspalte und es wird einfach

$$a^{(3)}_{\varkappa,\lambda} = a^{(2)}_{-\lambda_i+1,\beta_k} + m_{-\varkappa_i+1,\beta_k}$$
$$= a^{(2)}_{-\lambda_i+1,\beta_k} - a^{(2)}_{-\lambda_i+1,\beta_k} = 0.$$

2. Sei $\varkappa = -\beta_k + 1$. Dann ist die $\varkappa$-te Zeile von $\mathfrak{A}_{2*}$ eine Nullzeile, also auch die von $\mathfrak{A}_{2*}\,{}_*\mathfrak{M}$.

   a) Ist $\lambda = \lambda_i$, so wird also

$$a^{(3)}_{\varkappa,\lambda} = m_{-\varkappa_i+1,\beta_k} + a^{(2)}_{\beta_k+1,\lambda_i}$$
$$= -a^{(2)}_{-\lambda_i+1,\beta_k} + a^{(2)}_{-\lambda_i+1,\beta_k} = 0.$$

   b) Ist $\lambda = \beta_k$, so trifft die $\varkappa$-te Zeile von ${}_*\mathfrak{M}$ auf eine Nullspalte, so daß gilt:

$$a^{(3)}_{\varkappa\lambda} = a^{(2)}_{\varkappa\lambda}.$$

Außer in dem letzten Falle werden also alle Elemente von ${}_*\mathfrak{A}_3$ gleich Null, wie behauptet wurde.

Satz 6 (Reduktionssatz). *Jede nebensymmetrische halbfinite Matrix* $\mathfrak{A}$ *ist zu einer Normalform* $\mathfrak{N}$ *kongruent.*

Beweis. Nach den Hilfssätzen 1 bis 3 können nacheinander drei halbfinite Matrizen $\mathfrak{I}_p$, $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ mit halbfiniten Inversen $\mathfrak{I}_p^{-1}$, $\mathfrak{P}_1^{-1}$ und $\mathfrak{P}_2^{-1}$ bestimmt werden, so daß, wenn man $\mathfrak{I}_p \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{Q}$ setzt,

$$\tilde{\mathfrak{Q}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}_3$$

wird, wo $\mathfrak{A}_3$ die in Hilfssatz 3 behaupteten Eigenschaften hat. $\mathfrak{Q}$ wird wegen der Ringeigenschaft der halbfiniten Matrizen auch halbfinit und hat eine halbfinite Inverse. Mit ${}_*\mathfrak{N}$ wird nun derjenige (nebensymmetrische) Teil von ${}_*\mathfrak{A}_3$ bezeichnet, dessen Elemente möglicherweise noch von Null verschieden sein können (d. h. die Zeilen mit den Indizes $-\beta_i + 1$, die Spalten mit den Indizes β_k). Dann gibt es nach Satz 5 eine halbfinite Matrix $\mathfrak{S}$ mit halbfiniter Inversen $\mathfrak{S}^{-1}$, so daß für

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{N} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}$$

gilt

$$\tilde{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}_*\bar{\mathfrak{D}} & \mathfrak{O} \end{pmatrix},$$

wo

$${}_*\bar{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} . & . & 0 & \bar{d}_1 \\ . & . & \bar{d}_2 & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist mit $\bar{d}_i = \pm 1$ oder 0 $(i = 1, 2, \ldots)$. Wird nun $\mathfrak{N}$ zu $\mathfrak{A}_3$ ergänzt durch Einfügen der dazu nötigen Reihen und wird gleichzeitig $\mathfrak{S}$ dadurch zu $\mathfrak{T}$ ergänzt, daß in eben diesen Reihen die Hauptdiagonale mit $+1$ besetzt wird, sonst lauter Nullen, so wird auch $\mathfrak{T}$ halbfinit und hat eine halbfinite Inverse $\mathfrak{T}^{-1}$ (die in der gleichen Weise aus $\mathfrak{S}^{-1}$ hervorgeht wie $\mathfrak{T}$ aus $\mathfrak{S}$) und es wird

$$\tilde{\mathfrak{T}}\,\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_3 & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D} & \mathfrak{A}_{3*} \end{pmatrix},$$

wo sich ${}_*\mathfrak{D}$ von ${}_*\bar{\mathfrak{D}}$ höchstens durch symmetrisch eingefügte Nullreihen unterscheidet. Setzt man noch $\mathfrak{Q}\mathfrak{T} = \mathfrak{P}$, so folgt unmittelbar die Behauptung: $\mathfrak{P}$ wird wegen der Ringeigenschaft der halbfiniten Matrizen auch halbfinit und hat eine halbfinite Inverse und es gilt

$$\tilde{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_3 & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D} & \mathfrak{A}_{3*} \end{pmatrix}$$

w. z. b. w.

Kapitel III.

Nachweis eines kanonischen Systems von Normalformen.

A. Hilfssätze für die weitere Reduktion.

Die Aufstellung eines kanonischen Systems von Normalformen vollzieht sich jetzt in der Weise, daß die Normalformen durch kongruente Transformationen so weit vereinfacht werden, daß für je zwei verschiedene dieser vereinfachten Normalformen die Inkongruenz nachgewiesen werden kann.

Hilfssatz 1. *Wendet man auf die Spalten einer halbfiniten nebensymmetrischen Matrix* $\mathfrak{A}$ *eine umkehrbare Permutation an, und gleichzeitig auf die Zeilen die homologe Permutation, d. i. diejenige Permutation, die der ersten mit Rücksicht auf die Erhaltung der Nebensymmetrie analog ist, so geht die Matrix* $\mathfrak{A}$ *stets in eine zu ihr kongruente nebensymmetrische halbfinite Matrix über, außer in den Fällen, wo die erstgenannte Permutation eine unendliche Folge von Spalten, deren Indizes gegen* $+\infty$ *streben, mit einer solchen vertauscht, deren Indizes gegen* $-\infty$ *streben, oder umgekehrt.*

Beweis. Es sei $\varphi(m)$ eine Funktion von m, die die Gesamtheit der ganzen Zahlen umkehrbar eindeutig auf sich abbildet und $\mathfrak{P} = (p_{\varkappa\lambda})$ die Einsermatrix mit den Elementen $p_{\varkappa\lambda} = e_{\varkappa,\varphi(\lambda)}$, $e_{\varkappa,\varrho} = \begin{cases} 1 \text{ für } \varkappa = \varrho \\ 0 \text{ für } \varkappa \neq \varrho \end{cases}$. Bildet man dann für eine halbfinite Matrix $\mathfrak{A}$ das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$, so entsteht dies bekanntlich aus $\mathfrak{A}$, indem an die Stelle der λ-ten Spalte die $\varphi(\lambda)$-te gesetzt wird. Ebenso entsteht $\tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{A}$, indem an die Stelle der $\varkappa$-ten Zeile die $[-\varphi(-\varkappa+1)+1]$-te Zeile gesetzt wird. $\tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ entsteht also durch homologe Permutation von Zeilen und Spalten.

Damit nun sowohl $\mathfrak{P} = (e_{\lambda,\varphi(\lambda)})$ als auch $\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{P}' = (e_{\varphi(\lambda),\lambda})$ halbfinit werden, ist notwendig und hinreichend, daß, wenn λ die Folge $1, 2, 3, \ldots$ durchläuft, $\varphi(\lambda)$ schließlich nur positive Werte annimmt, und wenn λ die Folge $0, -1, -2, \ldots$ durchläuft, $\varphi(\lambda)$ schließlich nur negative Werte annimmt.

Hilfssatz 2. *Ist* $\mathfrak{N}$ *eine Normalform und kommen auf der Nebendiagonalen von* ${}_*\mathfrak{N}$ *zwei Elemente vor, von denen eines* $+1$, *das andere* -1 *ist, so kann man* $\mathfrak{N}$ *in eine zu ihr kongruente Normalform* $\mathfrak{N}_1$ *überführen, wo* ${}_*\mathfrak{N}_1$ *eine* $+1$ *und eine* -1 *weniger hat als* ${}_*\mathfrak{N}$, *dafür aber* $\mathfrak{N}_{1*}$ *und* ${}^*\mathfrak{N}_1$ *je eine* $+1$ *mehr haben als* $\mathfrak{N}_*$ *bzw.* ${}^*\mathfrak{N}$.

Beweis. Es seien

$$n_{\alpha,-\alpha+1} = +1, \quad n_{\beta,-\beta+1} = -1$$

die in der Voraussetzung genannten Elemente von ${}_*\mathfrak{N}$. Sodann sei die Matrix $\mathfrak{P}$ folgendermaßen bestimmt:

$$\begin{aligned} p_{\varrho\varrho} &= +1 \text{ für jedes } \varrho \neq -\alpha+1, \\ p_{-\alpha+1,\,-\alpha+1} &= +\tfrac{1}{2}, \\ p_{-\alpha+1,\,-\beta+1} &= +1, \\ p_{-\beta+1,\,-\alpha+1} &= -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

sonst lauter Nullen. Sie ist halbfinit und hat die halbfinite Inverse $\mathfrak{Q}$, welche so bestimmt ist:

$$\begin{aligned} q_{\varrho\varrho} &= +1 \text{ für jedes } \varrho \neq -\beta+1, \\ q_{-\beta+1,\,-\beta+1} &= +\tfrac{1}{2}, \\ q_{-\alpha+1,\,-\beta+1} &= -1, \\ q_{-\beta+1,\,-\alpha+1} &= +\tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

sonst lauter Nullen. Dann entsteht $\mathfrak{P}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{N}$ dadurch, daß $n_{\alpha,\,-\alpha+1}$ und $n_{\beta,\,-\beta+1}$ durch Null ersetzt werden, während $n_{\alpha,\,-\beta+1}$ und $n_{\beta,\,-\alpha+1}$ durch $+1$ ersetzt werden, aber sonst alles ungeändert bleibt. Diese Matrix kann aber unter Anwendung von Hilfssatz 1 durch eine Permutation in eine zu ihr kongruente Normalform $\mathfrak{N}_1$ übergeführt werden, die die behauptete Eigenschaft besitzt; also ist auch $\mathfrak{N}$ selbst zu dieser Normalform $\mathfrak{N}_1$ kongruent, w. z. b. w.

Zusatz. Dieser Schritt kann endlich oft vollzogen werden, d. h. der Hilfssatz gilt nicht nur für ein Paar $+1$, -1, sondern für endlich viele solcher Paare. Die Operation kann ferner wegen der Existenz der halbfiniten Inversen der transformierenden Matrizen auch in umgekehrter Richtung vollzogen werden.

B. Bezeichnungen.

Zur Vereinfachung der Darstellung führen wir nun noch einige Bezeichnungen ein. Es sei

$${}_*\mathfrak{D}_{\{p,\,m,\,n\}} = \begin{pmatrix} . & . & 0 & d_1 \\ . & . & d_2 & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix, deren Elemente $d_1, d_2, \ldots$ nur die Werte $+1$, -1, 0 haben; und zwar sollen p der Elemente den Wert $+1$, m den Wert -1 und n den Wert 0 haben (mindestens eine der drei Zahlen p, m, n muß also

den Wert ∞ haben). Die Reihenfolge, in der die $+1$, -1, 0 in ${}_*\mathfrak{D}_{\{p,m,n\}}$ geordnet sein sollen, ergibt sich aus der nachfolgenden Übersicht:

Wert von $\{p, m, n\}$	Folge $d_1, d_2, d_3, \ldots$
$\{\infty, \infty, \infty\}$	$0, +1, 0, -1, 0, +1, 0, -1, \ldots$
$\{p, \infty, \infty\}$	$+1, +1, \ldots, +1, 0, -1, 0, -1, \ldots$
$\{\infty, m, \infty\}$	$-1, -1, \ldots, -1, 0, +1, 0, +1, \ldots$
$\{\infty, \infty, 0\}$	$+1, -1, +1, -1, \ldots$
$\{p, m, \infty\}$	$+1, +1, \ldots, +1, -1, -1, \ldots, -1, 0, 0, 0, \ldots$
$\{p, \infty, 0\}$	$+1, +1, \ldots, +1, -1, -1, -1, \ldots$
$\{\infty, m, 0\}$	$-1, -1, \ldots, -1, +1, +1, +1, \ldots$

In dieser Tabelle bedeuten p und m stets endliche Werte (einschließlich 0). Es sind dabei von den kombinatorisch möglichen Fällen nur diejenigen aufgeführt, die nachher wirklich gebraucht werden.

Es sei ferner $\mathfrak{E}_{*\{\varkappa_i, \lambda_i\}}$ diejenige Einsermatrix, bei der die Elemente, deren Indizes $(\varkappa, \lambda)$ der gegebenen Folge $(\varkappa_i, \lambda_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ angehören, gleich $+1$ sind, während alle übrigen Elemente gleich Null sind. Insbesondere bedeutet also $\mathfrak{E}_{*\{i,i\}}$ die Einheitsmatrix, während z. B.

$$\mathfrak{E}_{*\{2i-1,\, n+i\}} = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \;\; 0 \;\ldots\; 0}^{n} & 1 & 0 & 0 & . \\ 0 \;\; 0 \;\ldots\; 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 \;\; 0 \;\ldots\; 0 & 0 & 1 & 0 & . \\ 0 \;\; 0 \;\ldots\; 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 \;\; 0 \;\ldots\; 0 & 0 & 0 & 1 & . \\ . \;\; . \;\ldots\; . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

ist, usw.

C. Weitere Reduktion der Normalformen.

Wir gehen jetzt von einer beliebigen gegebenen Normalform $\mathfrak{N}$ aus und reduzieren diese weiter. Dabei unterscheiden wir zwei Hauptfälle:

A. ${}^*\mathfrak{N}$ enthält nur endlich viele $+1$.

B. ${}^*\mathfrak{N}$ enthält unendlich viele $+1$.

Im Falle A. ist nach Hilfssatz 2, Zusatz, die betrachtete Normalform kongruent zu einer Normalform der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}^*\mathfrak{D} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}.$$

Es sind jetzt vier Unterfälle möglich:

I. ${}_*\mathfrak{D}$ enthält unendlich viele $+1$ und unendlich viele -1.
II. ${}_*\mathfrak{D}$ enthält endlich viele $+1$ und unendlich viele -1.
III. ${}_*\mathfrak{D}$ enthält unendlich viele $+1$ und endlich viele -1.
IV. ${}_*\mathfrak{D}$ enthält endlich viele $+1$ und endlich viele -1.

In den drei Unterfällen I. bis III. unterscheiden wir, ob auf der Nebendiagonalen von ${}_*\mathfrak{D}$ unendlich viele Nullen (Ia, IIa, IIIa) oder nur endlich viele (Ib, IIb, IIIb) vorkommen. Im letzteren Falle kann durch Permutation (Hilfssatz 1) eine kongruente Normalform erreicht werden, bei der auf der Nebendiagonalen von ${}_*\mathfrak{D}$ gar keine Nullen mehr vorkommen. Weiter kann durch Permutation die Reihenfolge der Elemente auf der Nebendiagonalen von ${}_*\mathfrak{D}$ abgeändert werden. Hiernach ist es klar, daß im Falle A. jede Normalform zu einer der folgenden Normalformen kongruent ist:

I.

a) $\begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{\infty,\,\infty,\,\infty\}} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{\infty,\,\infty,\,0\}} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}$

II.

a) $\begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{p,\,\infty,\,\infty\}} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{p,\,\infty,\,0\}} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}$

$p = 0, 1, 2, \ldots$ $p = 0, 1, 2, \ldots$

III.

a) $\begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{\infty,\,m,\,\infty\}} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{\infty,\,m,\,0\}} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}$

$m = 0, 1, 2, \ldots$ $m = 0, 1, 2, \ldots$

IV.

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{p,\,m,\,\infty\}} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}$$

$p, m = 0, 1, 2, \ldots$

Die Gruppen II., III. und IV. enthalten also je unendlich viele Normalformen.

Im Falle B. hat die Normalform $\mathfrak{N}$ das Aussehen

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E}_* & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D} & \mathfrak{E}_* \end{pmatrix},$$

wo die Einsermatrix $\mathfrak{E}_*$ unendlich viele $+1$ enthält und daher ${}_*\mathfrak{D}$ unendlich

viele Nullen auf der Nebendiagonalen haben muß. Genau wie im Falle A. unterscheiden wir jetzt die vier Unterfälle:

V. $_*\mathfrak{D}$ enthält unendlich viele $+1$ und unendlich viele -1.
VI. $_*\mathfrak{D}$ enthält endlich viele $+1$ und unendlich viele -1.
VII. $_*\mathfrak{D}$ enthält unendlich viele $+1$ und endlich viele -1.
VIII. $_*\mathfrak{D}$ enthält endlich viele $+1$ und endlich viele -1.

Je nach dem Vorkommen von Nullspalten in $\mathfrak{N}$ zerfällt jeder der Unterfälle V. bis VIII. selbst in vier Unterfälle:

Setzen wir

$$\mathfrak{N}_l = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{E}}_* \\ {}_*\mathfrak{D} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{N}_r = \begin{pmatrix} \mathfrak{O} \\ \mathfrak{E}_* \end{pmatrix},$$

so sind diese Fälle:

a) $\mathfrak{N}_l$ enthält endlich viele Nullspalten,
$\mathfrak{N}_r$ enthält endlich viele Nullspalten.
b) $\mathfrak{N}_l$ enthält endlich viele Nullspalten,
$\mathfrak{N}_r$ enthält unendlich viele Nullspalten.
c) $\mathfrak{N}_l$ enthält unendlich viele Nullspalten,
$\mathfrak{N}_r$ enthält endlich viele Nullspalten.
d) $\mathfrak{N}_l$ enthält unendlich viele Nullspalten,
$\mathfrak{N}_r$ enthält unendlich viele Nullspalten.

Dieser Unterteilung entsprechend sind im Falle V. die Normalformen nach Hilfssatz 1 zu einer der folgenden Normalformen kongruent:

V.

a) $$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{E}}_{*\{2i-1,\ n+i\}} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{\infty,\ \infty,\ \infty\}} & \mathfrak{E}_{*\{2i-1,\ n+i\}} \end{pmatrix},$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

b) $$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{E}}_{*\{2i-1,\ 2i-1\}} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{\infty,\ \infty,\ \infty\}} & \mathfrak{E}_{*\{2i-1,\ 2i-1\}} \end{pmatrix},$$

c) $$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{E}}_{*\{4i-3,\ i\}} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{\infty,\ \infty,\ \infty\}} & \mathfrak{E}_{*\{4i-3,\ i\}} \end{pmatrix},$$

d) $$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{E}}_{*\{4i-3,\ 2i-1\}} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{\infty,\ \infty,\ \infty\}} & \mathfrak{E}_{*\{4i-3,\ 2i-1\}} \end{pmatrix}.$$

Um dies etwa im Falle Vb) näher auszuführen: Zunächst können alle Nullspalten in den rechten Teil permutiert werden. Sodann kann durch eine homologe Permutation, die nur die Spalten des linken Teiles betrifft, die

richtige Ordnung in ${}_*\mathfrak{D}$ hergestellt werden; danach kann durch eine weitere homologe Permutation, die nur die Spalten des rechten Teiles betrifft, die endgültige Gestalt erreicht werden.

Im Falle VI. können wir durch Anwendung von Hilfssatz 2, Zusatz, eine Normalform erreichen, bei der $+1$ in ${}_*\mathfrak{D}$ überhaupt nicht mehr vorkommt, im Falle VII. eine solche, bei der -1 in ${}_*\mathfrak{D}$ nicht mehr vorkommt, und im Falle VIII. entweder (VIII. α) eine solche, bei der in ${}_*\mathfrak{D}$ keine -1, aber mindestens eine $+1$ vorkommt, oder (VIII. β) eine solche, bei der in ${}_*\mathfrak{D}$ keine -1, aber mindestens eine -1 vorkommt, oder schließlich (VIII. γ) eine solche, bei der ${}_*\mathfrak{D}$ die Nullmatrix ist. In den Fällen VI. bis VIII. sind daher die Normalformen nach Hilfssatz 1 zu einer der folgenden Normalformen kongruent:

VI. (wie V., nur ${}_*\mathfrak{D}_{\{0,\infty,\infty\}}$ statt ${}_*\mathfrak{D}_{\{\infty,\infty,\infty\}}$).

VII. (wie V., nur ${}_*\mathfrak{D}_{\{\infty,0,\infty\}}$ statt ${}_*\mathfrak{D}_{\{\infty,\infty,\infty\}}$).

VIII. α.

a) $$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{E}}_{*\{p+i,\ n+i\}} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{p,0,\infty\}} & \mathfrak{E}_{*\{p+i,\ n+i\}} \end{pmatrix},$$
$$p = 1, 2, \ldots,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

b) $$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{E}}_{*\{p+i,\ 2i-1\}} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{p,0,\infty\}} & \mathfrak{E}_{*\{p+i,\ 2i-1\}} \end{pmatrix},$$
$$p = 1, 2, \ldots$$

c) $$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{E}}_{*\{p+2i-1,\ i\}} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{p,0,\infty\}} & \mathfrak{E}_{*\{p+2i-1,\ i\}} \end{pmatrix},$$
$$p = 1, 2, \ldots$$

d) $$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{E}}_{*\{p+2i-1,\ 2i-1\}} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{p,0,\infty\}} & \mathfrak{E}_{*\{p+2i-1,\ 2i-1\}} \end{pmatrix}.$$
$$p = 1, 2, \ldots$$

VIII. β. (wie VIII. α., nur ${}_*\mathfrak{D}_{\{0,m,\infty\}}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, statt ${}_*\mathfrak{D}_{\{p,0,\infty\}}$).

VIII. γ. (wie VIII. α., nur ${}_*\mathfrak{D}_{\{0,0,\infty\}}$ statt ${}_*\mathfrak{D}_{\{p,0,\infty\}}$).

Durch das Vorangehende ist jetzt bewiesen:

Satz 7: *Jede Normalform* $\mathfrak{N}$ *ist zu einer der unter* I. *bis* VIII. *aufgeführten Normalformen kongruent.*

D. Nachweis der Inkongruenz der restlichen Normalformen.

Es bleibt nun noch folgendes zu zeigen:

Satz 8: *Die unter* I. *bis* VIII. *aufgeführten Normalformen sind paarweise zueinander inkongruent.*

Die Sätze 7 und 8 zusammen besagen dann, daß die unter I. bis VIII. aufgeführten Normalformen ein kanonisches System bilden.

Der Beweis von Satz 8 wird in fünf Teile gegliedert. Im ersten dieser Teile wird eine Invariante aufgezeigt, die für die Substitutionen mit halbfiniter Koeffizientenmatrix typisch ist. Im zweiten und dritten Teil werden dagegen Invarianten nachgewiesen, die schon im endlichen Fall ein Analogon haben, nämlich der Rang, der Positivrang und der Negativrang. Im vierten und fünften Teil schließlich werden die Begriffe Positivrang und Negativrang in gewisser Weise verschärft, wie dies schon im zweiten Teil mit dem Analogon des Ranges geschehen ist; diese Verschärfungen beruhen letzten Endes auf der typischen Invariante aus dem ersten Teil des Beweises.

1. Die Gesamtheit aller linksfiniten Stellen, d. h. aller Stellen $\mathfrak{x} = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \mid x_1, x_2, \ldots)$, die nur endlich viele von Null verschiedene Koordinaten mit negativem Index haben, bildet den halbfiniten Raum ψ. Der Ring der halbfiniten Matrizen gehört zu diesem Raum in dem Sinne, daß eine lineare Substitution mit halbfiniter Koeffizientenmatrix auf jede Stelle aus ψ anwendbar ist und sie wieder in eine Stelle von ψ überführt. Insbesondere führt sie jede *gleichmäßig linksfinite* Menge von Stellen aus ψ wieder in eine solche über, wobei „gleichmäßig linksfinit" heißen soll, daß für den kleinsten Index der von Null verschiedenen Koordinaten jeder Stelle der Menge eine untere Grenze existiert. Diese Tatsache folgt unmittelbar aus den charakteristischen Eigenschaften einer halbfiniten Matrix.

Als Anwendung davon ergibt sich sofort die Inkongruenz der Normalformen aus I. bis IV. einerseits zu denen aus V. bis VIII. andererseits. Denn eine Normalform $\mathfrak{N}_1$ der ersten Art führt jede Menge von Stellen aus ψ in eine gleichmäßig linksfinite Menge über, während jede Normalform $\mathfrak{N}_2$ der zweiten Art eine passend ausgewählte Teilfolge $\mathfrak{e}_{\alpha_1}, \mathfrak{e}_{\alpha_2}, \ldots$ in eine nicht gleichmäßig linksfinite Folge überführt. Wäre also $\mathfrak{N}_1$ zu $\mathfrak{N}_2$ kongruent, $\mathfrak{P}\mathfrak{N}_1\mathfrak{P} = \mathfrak{N}_2$, so würde die Anwendung von $\mathfrak{N}_2$ auf diese Folge eine nicht gleichmäßig linksfinite Folge ergeben, dagegen die Anwendung von $\mathfrak{P}\mathfrak{N}_1\mathfrak{P}$ eine gleichmäßig linksfinite, was einen Widerspruch bedeutet.

2. Betrachtet man das Gleichungssystem $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$, wo $\mathfrak{A}$ halbfinit ist und als Lösungen nur Stellen aus ψ zugelassen werden, so ist die Gesamtheit der Lösungen ein Teilraum von ψ. Einer zu $\mathfrak{A}$ kongruenten Matrix $\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ entspricht eine Lösungsgesamtheit, welche dieselbe *Dimension* hat wie die

von $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$, d. h. die Kardinalzahl der linear unabhängigen Lösungen ist die gleiche. Wenn $\mathfrak{A}$ eine Normalform ist, stimmt aber diese Kardinalzahl offenbar mit der Kardinalzahl der Menge der Nullspalten überein, womit die letztere als invariant dargetan ist. Die Lösungsgesamtheit von $\mathfrak{B}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ kann aus der von $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ durch Anwendung der Substitution $\mathfrak{P}^{-1}$ erhalten werden, so daß auf Grund von 1. entweder beide Lösungsgesamtheiten gleichmäßig linksfinit oder beide nicht gleichmäßig linksfinit sein müssen. Ferner kann durch die Substitution $\mathfrak{P}^{-1}$ aus einer gleichmäßig linksfiniten Menge von Stellen von unendlicher Dimension keine gleichmäßig rechtsfinite Menge erhalten werden, denn diese würde auch gleichmäßig linksfinit sein und wäre daher von endlicher Dimension, was einen Widerspruch bedeutet.

Durch diese Tatsachen ist die Inkongruenz aller derjenigen Normalformen erkenntlich, die bei der Aufstellung des Repräsentantensystems nur mit Rücksicht auf die Verteilung der Nullreihen unterschieden wurden[17]).

3. Wir betrachten die quadratische Form

$$F_{\mathfrak{A}} = \sum_{\varkappa,\,\lambda\,=\,-\,\infty}^{+\,\infty} a_{\varkappa\lambda}\, x_{-\varkappa+1}\, x_{\lambda}$$

mit der nebensymmetrischen halbfiniten Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$; sie hat für jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus ψ einen wohlbestimmten Wert, denn die obige Summe hat für solche $\mathfrak{x}$ nur endlich viele Summanden. Wendet man auf $F_{\mathfrak{A}}$ die Substitution $\mathfrak{x} = \mathfrak{P}\mathfrak{y}$ an, wo $\mathfrak{P}$ halbfinit ist und eine halbfinite Inverse hat, so geht $F_{\mathfrak{A}}$ in $F_{\mathfrak{B}}$ mit der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{P}}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ über. Ist nun $\mathfrak{x}$ Positivstelle von $F_{\mathfrak{A}}$, d. h. ist $F_{\mathfrak{A}}$ an der Stelle $\mathfrak{x}$ aus ψ positiv, so ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{x}$ Positivstelle von $F_{\mathfrak{B}}$. Ist also π ein Teilraum von ψ, der mit Ausnahme der im folgenden stets auszuschließenden Stelle $(\ldots, 0, 0, 0, \ldots)$ nur aus Positivstellen von $F_{\mathfrak{A}}$ besteht, so ist $\pi' = \mathfrak{P}^{-1}(\pi)$ ein solcher von derselben Dimension, der aus lauter Positivstellen von $F_{\mathfrak{B}}$ besteht. Der Positivrang, d. h. die maximale Dimension aller Teilräume von ψ, die aus lauterPositivstellen einer Form bestehen, ist daher eine Invariante. Ebenso ist der entsprechend erklärte Negativrang eine Invariante. Mit Hilfe dieser Tatsachen ist die paarweise Inkongruenz aller Normalformen aus I. bis IV., soweit sie nicht schon bewiesen ist, unmittelbar einzusehen, denn bei diesen Normalformen ist der Positivrang einfach gleich der Kardinalzahl der vorkommenden $+1$ und der Negativrang gleich derjenigen der -1.

Damit ist der Beweis von Satz 8 schon insofern geliefert, daß nur noch die paarweise Inkongruenz der Normalformen aus V. bis VIII. zu beweisen ist, soweit sie nicht schon durch die Verteilung der Nullreihen verursacht wird.

[17]) Vgl. die in Fußnote [5]) erwähnte Abhandlung, Journ. f. Math. **165**, wo diese Schlüsse schon vorkommen.

Zur Erledigung dieser restlichen Fragen sind die zwei folgenden Beweismethoden nötig, welche ich zwecks übersichtlicher Darstellung an Spezialfällen demonstrieren werde; es ist dann nachträglich leicht zu übersehen, daß sie auch auf alle anderen einschlägigen Fälle anwendbar sind.

4. Es werden folgende beiden Normalformen betrachtet:

$$\mathfrak{N}_1 = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{E}}_{*\{2i-1,\,i\}} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{\infty,\,0,\,\infty\}} & \mathfrak{E}_{*\{2i-1,\,i\}} \end{pmatrix} \qquad \text{[aus VII.]}$$

$$\mathfrak{N}_2 = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{E}}_{*\{2i-1,\,i\}} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{0,\,\infty,\,\infty\}} & \mathfrak{E}_{*\{2i-1,\,i\}} \end{pmatrix} \qquad \text{[aus VI.]}$$

und die ihnen entsprechenden quadratischen Formen:

$$\begin{aligned} F_1 &= x_{-1}^2 + x_{-3}^2 + x_{-5}^2 + \cdots \\ &\quad + 2\,x_0x_1 + 2\,x_{-2}x_2 + 2\,x_{-4}x_3 + \cdots \\ F_2 &= -\,x_{-1}^2 - x_{-3}^2 - x_{-5}^2 - \cdots \\ &\quad + 2\,x_0x_1 + 2\,x_{-2}x_2 + 2\,x_{-4}x_3 + \cdots. \end{aligned}$$

Zu jeder Positivstelle $\mathfrak{x}$ von F_2 gibt es dann eine Negativstelle $\mathfrak{x}'$ von F_2, so daß $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}'$ eine Nullstelle von F_2 von der Kürze Null ist, d. h. bei der alle Koordinaten, deren Indizes kleiner als Null sind verschwinden. Denn ist $\mathfrak{x} = (\ldots, x_{-1}, x_0 | x_1, \ldots)$ eine Positivstelle von F_2, so ist $\mathfrak{x}' = (\ldots, -x_{-2}, -x_{-1}, -x_0 | x_1, \ldots)$ eine Negativstelle von F_2, so daß $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}'$ die behauptete Eigenschaft hat.

Wäre nun $\mathfrak{N}_1$ zu $\mathfrak{N}_2$ kongruent, so würde aus dem obigen folgen, daß es zu jeder Positivstelle von F_1 eine Negativstelle von F_1 gibt, so daß die Summe dieser beiden eine Nullstelle von F_1 ist, deren Kürze über einer festen Grenze liegt. Denn die Stellen von der Kürze Null bilden eine gleichmäßig linksfinite Menge, welche durch die halbfinite Substitution wieder in eine solche übergeht.

Diese Aussage über F_1 führt aber zu einem Widerspruch. Denn ist ϱ ein ungerader negativer Index, derart daß die Kürze von $\mathfrak{e}_\varrho$ unter die vorgenannte Grenze fällt, so gibt es zu $\mathfrak{e}_\varrho$, welches selbst Positivstelle von F_1 ist, keine solche Negativstelle von F_1. Denn diese müßte gleich $-\mathfrak{e}_\varrho + \mathfrak{x}''$ sein, wo $\mathfrak{x}''$ eine Nullstelle ist, deren Kürze über der Grenze liegt. Dann ist $-\mathfrak{e}_\varrho + \mathfrak{x}''$ aber eine Positivstelle, was einen Widerspruch bedeutet.

Mit dieser Methode kann die paarweise Inkongruenz der Normalformen aus V. bis VII. restlos erledigt werden, ebenso die Inkongruenz dieser zu den Normalformen aus VIII. Denn je nachdem, ob eine Form F mit unendlich vielen positiven Quadraten (VII.) oder eine solche mit unendlich vielen negativen Quadraten (VI.) vorliegt, läßt sich die invariante Aussage machen: Zu jeder Negativstelle (Positivstelle) $\mathfrak{x}$ von F gibt es eine Positivstelle (Negativ-

stelle) $\mathfrak{x}'$ von F derart, daß $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}'$ eine Nullstelle von F ist, deren Kürze unter einer von $\mathfrak{x}$ unabhängigen Grenze liegt. Damit kann die Inkongruenz der Formen aus VI. bis VII. untereinander und zu denen aus V. nach dem obigen Vorbild bewiesen werden. Die Formen aus VIII. haben sogar die schärfere invariante Eigenschaft: Es gibt sowohl zu jeder Positivstelle $\mathfrak{x}$ eine $[\leqq 0]$-Stelle $\mathfrak{x}'$ als auch zu jeder Negativstelle $\mathfrak{x}$ eine $[\geqq 0]$-Stelle $\mathfrak{x}'$ derart, daß $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}'$ eine $[\geqq 0]$-Stelle bzw. $[\leqq 0]$-Stelle ist, deren Kürze unter einer von $\mathfrak{x}$ unabhängigen Grenze liegt. Hieraus ergibt sich die Inkongruenz der Formen aus VIII. zu denen aus V. bis VII.

Um nun schließlich zu zeigen, daß auch die Formen aus VIII. paarweise inkongruent sind, wird jetzt die zweite Beweismethode entwickelt.

5. Es werden folgende beiden Normalformen betrachtet:

$$\mathfrak{N}_1 = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{E}}_{*\{\alpha+i,\, i\}} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{\alpha,\, 0,\, \infty\}} & \mathfrak{E}_{*\{\alpha+i,\, i\}} \end{pmatrix} \qquad \text{[aus VIII.}\alpha\text{]}$$

$$\mathfrak{N}_2 = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{E}}_{*\{\beta+i,\, i\}} & \mathfrak{O} \\ {}_*\mathfrak{D}_{\{0,\, \beta,\, \infty\}} & \mathfrak{E}_{*\{\beta+i,\, i\}} \end{pmatrix} \qquad \text{[aus VIII.}\beta\text{]}$$

(α, β zwei feste natürliche Zahlen)

mit den ihnen entsprechenden quadratischen Formen:

$$F_1 = x_0^2 + x_{-1}^2 + \cdots + x_{-\alpha+1}^2 + 2\,x_{-\alpha}\,x_1 + 2\,x_{-\alpha-1}\,x_2 + 2\,x_{-\alpha-2}\,x_3 + \cdots,$$

$$F_2 = -\,x_0^2 - x_{-1}^2 - \cdots - x_{-\beta+1}^2 + 2\,x_{-\beta}\,x_1 + 2\,x_{-\beta-1}\,x_2 + 2\,x_{-\beta-2}\,x_3 + \cdots.$$

Es wird nun angenommen, daß $\mathfrak{N}_1$ zu $\mathfrak{N}_2$ kongruent ist, also $\mathfrak{P}\,\mathfrak{N}_1\,\mathfrak{P} = \mathfrak{N}_2$, wo $\mathfrak{P}$ halbfinit ist und eine halbfinite Inverse hat. Diese Annahme führt dann dadurch auf einen Widerspruch, daß man den Positiv- und den Negativrang jetzt in bezug auf Teilräume von ψ betrachtet.

Unter $\varepsilon(\alpha_\varkappa, \alpha_{\varkappa+1}, \ldots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ soll dabei der Raum derjenigen linksfiniten Stellen verstanden werden, deren Koordinaten mit den Indizes $\alpha_\varkappa, \ldots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \ldots$ ganz beliebige reelle Werte haben, während alle übrigen Koordinaten Null sind; dies ist also ein besonders einfacher gleichmäßig linksfiniter Teilraum von ψ. Wendet man auf $\varepsilon(-\beta+1, -\beta+2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ die Transformation $\mathfrak{P}$ an, so erhält man wieder einen Raum gleichmäßig linksfiniter Stellen. Daher gibt es einen Raum $\varepsilon(\delta, \delta+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, welcher sowohl diesen Raum als auch den Raum $\varepsilon(-\alpha+1, -\alpha+2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ enthält. Er soll ϱ_1 heißen, während der Raum $\mathfrak{P}^{-1}(\varrho_1)$ mit ϱ_2 bezeichnet wird; der letztere enthält dann sicher den Raum $\varepsilon(-\beta+1, -\beta+2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$.

Unter dem Positivrang von $\mathfrak{N}_1$ in bezug auf ϱ_1 versteht man nun die maximale Dimension aller Teilräume von ϱ_1, welche aus lauter Positivstellen von F_1 bestehen. Wegen $\varrho_2 = \mathfrak{P}^{-1}(\varrho_1)$ ist dieser gleich dem Positivrang von $\mathfrak{N}_2$ in bezug auf ϱ_2. Über den Negativrang läßt sich Entsprechendes sagen; also ist die Differenz zwischen Positivrang und Negativrang von $\mathfrak{N}_1$, beide in bezug auf ϱ_1, die gleiche wie die entsprechende Differenz für $\mathfrak{N}_2$ in bezug auf ϱ_2.

Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß diese Differenz für $\mathfrak{N}_1$ in bezug auf ϱ_1 gleich α ist. Dazu wird der Raum aller endlichen linearen Kombinationen der Stellen

$$\mathfrak{e}_0,\ \mathfrak{e}_{-1},\ \ldots,\ \mathfrak{e}_{-\alpha+1},\ \mathfrak{e}_{-\alpha} + \mathfrak{e}_1,\ \mathfrak{e}_{-\alpha-1} + \mathfrak{e}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{e}_\delta + \mathfrak{e}_{-\delta-\alpha+1}$$

betrachtet. Dieser ist ein $(-\delta+1)$-dimensionaler Teilraum von ϱ_1, welcher aus lauter Positivstellen von F_1 besteht. Der Raum aller endlichen linearen Kombinationen der Stellen

$$\mathfrak{e}_{-\alpha} - \mathfrak{e}_1,\ \mathfrak{e}_{-\alpha-1} - \mathfrak{e}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{e}_\delta - \mathfrak{e}_{-\delta-\alpha+1}$$

ist ein $(-\delta-\alpha+1)$-dimensionaler Teilraum von ϱ_1, welcher aus lauter Negativstellen von F_1 besteht. Fügt man zu diesen beiden Räumen noch den Raum $\mathfrak{e}(-\delta-\alpha+2, -\delta-\alpha+3, \ldots)$ hinzu, so ist offenbar jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus ϱ_1 als Summe je einer Stelle aus diesen drei Räumen darstellbar:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p} + \mathfrak{m} + \mathfrak{n}.$$

Würde nun ein Raum aus lauter Positivstellen von F_1 mit größerer Dimension als $-\delta+1$ in ϱ_1 enthalten sein, so würde er $-\delta+2$ linear unabhängige Positivstellen

$$\mathfrak{x}^{(i)} = \mathfrak{p}^{(i)} + \mathfrak{m}^{(i)} + \mathfrak{n}^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, -\delta+2)$$

von F_1 enthalten. $-\delta+2$ Stellen $\mathfrak{p}^{(i)}$ sind aber linear abhängig; also gäbe es eine endliche, nicht identisch verschwindende lineare Kombination der $\mathfrak{x}^{(i)}$, welche nur noch die $\mathfrak{m}^{(i)}$ und die $\mathfrak{n}^{(i)}$ enthielte und damit keine Positivstelle wäre, im Widerspruch zu der obigen Annahme. Das bedeutet aber, daß der Positivrang von F_1 in bezug auf ϱ_1 genau gleich $-\delta+1$ ist. Entsprechend zeigt man, daß der Negativrang von F_1 in bezug auf ϱ_1 genau gleich $-\delta-\alpha+1$ ist, so daß die Differenz wirklich gleich α ist. Sie müßte also für F_2 in bezug auf ϱ_2 auch gleich α sein. Daß dies nicht der Fall und somit ein Widerspruch entsteht, soll jetzt gezeigt werden.

Zunächst ist klar, daß der Positiv- und der Negativrang von F_2 in bezug auf ϱ_2 ebenfalls endlich sind; denn ϱ_2 ist in einem Raum $\mathfrak{e}(\gamma, \gamma+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ enthalten und in bezug auf diesen sind die Ränge, wie aus dem Obigen hervorgeht, endlich; beim Übergang zu einem Teilraum werden sie aber höchstens kleiner. Nun wird ein Teilraum π von ϱ_2 betrachtet, der aus lauter Positivstellen besteht und dessen Dimension p gleich dem Positiv-

rang von F_2 in bezug auf ϱ_2 ist. Die Gesamtheit derjenigen Stellen, die aus denen von π hervorgehen, indem man darin die Vorzeichen der Koordinaten mit den Indizes 1, 2, 3, ... umkehrt, ist dann ebenfalls ein Teilraum von ϱ_2, weil (wie oben gesagt) alle Stellen aus $\varepsilon(-\beta+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, also um so mehr die aus $\varepsilon(1, 2, \ldots)$ zu ϱ_2 gehören. Dieser Teilraum ν' hat die Dimension p und besteht aus lauter Negativstellen von F_2. Er enthält keine Stelle des Raumes $\varepsilon(-\beta+1, -\beta+2, \ldots, -1, 0)$. Denn sonst würde π auch eine Stelle dieses Raumes enthalten haben; das geht aber nicht, da die Stellen aus ν' keine Positivstellen sind. Bildet man also den Raum ν aller derjenigen Stellen, welche als Summe einer Stelle aus ν' und einer Stelle aus $\varepsilon(-\beta+1, \ldots, -1, 0)$ darstellbar sind, so wird dessen Dimension gleich $p+\beta$ und er besteht aus lauter Negativstellen von F_2, wie ein Blick auf das Bildungsgesetz der Stellen aus ν' lehrt. Daher ist der Negativrang von F_2 in bezug auf ϱ_2 größer oder gleich $p+\beta$, d. h. die gesuchte Differenz ist kleiner oder gleich $-\beta$. Auf keinen Fall kann sie also gleich α sein.

Für die Anwendung dieser Methode auf die übrigen einschlägigen Fälle beachte man, daß z. B. bei zwei Normalformen aus VIII. α diejenige mit der kleineren Anzahl von $+1$ in ${}_*\mathfrak{N}$ im Beweis an die Stelle von $\mathfrak{N}_1$ zu setzen ist.

Damit ist nun auch die paarweise Inkongruenz der Normalformen aus VIII. in jedem Falle gezeigt, womit der Beweis von Satz 8 abgeschlossen ist.

Lebenslauf

Ich, Bruno Ritzdorff, wurde geboren in Bonn am 10. Oktober 1912 als Sohn des Möbelhändlers Karl Ritzdorff und seiner Ehefrau Anna, geb. Fischer. Ich bin rein arischer Abstammung und bekenne mich zum römisch-katholischen Glauben. Ostern 1931 bestand ich an der Oberrealschule zu Bonn die Reifeprüfung. Vom Sommersemester 1931 bis zum Wintersemester 1935/36 studierte ich an der Universität zu Bonn Mathematik, Leibesübungen, Physik, Philosophie und Psychologie.

Die mündliche Doktorprüfung in Mathematik, Physik und Psychologie fand am 17. Februar 1937 statt.

Druck von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig
Printed in Germany